

# ENERGIA

**JOURNAL  
OF ENERGY**

## IZDAVAČ

Hrvatska elektroprivreda d.d., Zagreb

## ZA IZDAVAČA

Mr. sc. Ivan Mravak

## SUIZDAVAČI

Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva  
Ministarstvo gospodarstva, rada i poduzetništva

## POMOĆ U IZDAVANJU

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa

## UREĐIVAČKI SAVJET

Mr. sc. Kažimir Vrankić (predsjednik) - doc. dr. sc. Ante Čurković - prof. dr. sc. Igor Dekanić Zagreb - prof. dr. sc. Danilo Feretić, Zagreb - mr. sc. Nikica Grubišić, Zagreb - prof. dr. sc. Slavko Krajcar, Zagreb - doc. dr. sc. Željko Tomšić, Zagreb - dr. sc. Mladen Zeljko, Zagreb

## UREĐIVAČKI ODBOR

Glavni urednik – mr. sc. Goran Slipac, Zagreb  
Glavni tajnik – mr. sc. Slavica Barta-Koštrun, Zagreb  
Lektor – Šimun Čagalj, prof., Zagreb  
Metrološka recenzija – Dragan Borojević, dipl. ing., Zagreb  
Prijevod – Hrvatsko društvo znanstvenih i tehničkih prevoditelja – Prevoditeljski centar, Zagreb

## UREDNIŠTVO I UPRAVA

HEP d.d. - Energija, Uređivački odbor  
Ulica grada Vukovara 37, 10000 Zagreb, Hrvatska  
Telefoni: +385 (1) 6171291 i 6322641  
Telefaks: +385 (1) 6322143  
e-mail: goran.slipac@hep.hr; slavica.barta@hep.hr;  
www.hep.hrGodišnje izlazi 6 brojeva.  
Godišnja pretplata bez PDV-a (22 %) iznosi:  
– za pojedince 250 kn  
– za poduzeća 400 kn  
– za studente 60 kn  
Žiro račun kod Zagrebačke banke broj:  
2360000-1400129978Godišnja pretplata za inozemstvo iznosi USD 95.  
Devizni račun:  
Zagrebačka banka broj: 2000006299Grafičko uređenje omota – mr. sc. Kažimir Vrankić, Zagreb  
Grafičko uređivanje – Bestias Dizajn d.o.o., Zagreb  
Tisak – Intergrafika d.o.o., ZagrebNaklada – 1 500 primjeraka      Godište 56(2007)  
Zagreb, 2007      Broj 6., str. 637–758

Oglasi su veličine jedne stranice. Cijena oglasa je 3 000 kn bez PDV (22%).

## PUBLISHED BY

Hrvatska elektroprivreda d.d., Zagreb

## PUBLISHER'S REPRESENTATIVE

Ivan Mravak, MSc

## CO-PUBLISHED BY

University of Zagreb, Faculty of Electrical Engineering and Computing  
Ministry of Economy, Labour and Entrepreneurship

## SUPPORTED BY

Ministry of Science, Education and Sport

## EDITORIAL COUNCIL

Kažimir Vrankić, MSc (Chairman), HEP d.d., Zagreb - Assistant Prof Ante Čurković, PhD, Zagreb - Prof Igor Dekanić, PhD, Zagreb - Prof Danilo Feretić, PhD, Zagreb - Nikica Grubišić, MSc, Zagreb - Prof Slavko Krajcar, PhD, Zagreb - Assistant Prof Željko Tomšić, PhD, Zagreb - Mladen Zeljko, PhD, Zagreb

## EDITORIAL BOARD

Editor-in-Chief – Goran Slipac, MSc, Zagreb  
Secretary – Slavica Barta-Koštrun, MSc, Zagreb  
Language Editor – Šimun Čagalj, prof., Zagreb  
Metrology – Dragan Borojević, dipl. ing., Zagreb  
Translation – Croatian Association of Scientific and Technical Translators – Croatian Translation Agency, Zagreb

## HEAD OFFICE AND MANAGEMENT

HEP d.d. - Energija, Editorial Board  
Ulica grada Vukovara 37, 10000 Zagreb, Croatia  
Telephone: +385 (1) 6171291 and 6322641  
Fax: +385 (1) 6322143  
e-mail: goran.slipac@hep.hr; slavica.barta@hep.hr;  
www.hep.hrAppears 6 times a year.  
Annual subscription fee excl. VAT (22 %):  
– for individual subscribers HRK 250  
– for companies HRK 400  
– for students HRK 60  
Number of giro account with Zagrebačka Banka:  
2360000-1400129978Annual subscription fee for the overseas: USD 95.  
Number of foreign currency account with Zagrebačka Banka:  
2000006299Cover design – Kažimir Vrankić, MSc, Zagreb  
Graphic layout – Bestias Dizajn d.o.o., Zagreb  
Printed by – Intergrafika d.o.o., ZagrebCirculation – 1,500 copies      Volume 56(2007)  
Zagreb, 2007      No 6., pp. 637–758

Ads are the size of page. The price of an ad is HRK 3 000 excl. VAT (22%).

## SADRŽAJ

*Rajšl, I., Krajcar, S., Krpan, K.*  
PRIMJENA VIŠEAGENTSkih SUSTAVA U SIMULATORIMA TRŽIŠTA ELEKTRIČNOM ENERGIJOM (pregledni članak)*Goić, R., Jakus, D., Mudnić, E.*  
PRORAČUN GODIŠNJIH GUBITAKA RADNE ENERGIJE U DISTRIBUCIJSKOJ MREŽI S PRIKLJUČENOM VJETROELEKTRANOM (izvorni znanstveni članak)*Vujević, D.*  
PRIMJENA MÖBIUSOVE VRPCE U ELEKTROTEHNICI (prethodno priopćenje)*Čučić, B.*  
3D PRORAČUN KVAZISTATIČKOG MAGNETSKOG POLJA OKO VODIČA I FEROMAGNETSKE PLOČE INTEGRALNIM JEDNADŽBAMA (izvorni znanstveni članak)*Barić, T., Šljivac, D., Stojkov, M.*  
GRANICE VALJANOSTI IZRAZA ZA MJERENJA SPECIFIČNOG OTPORA TLA WENNEROVOM METODOM PREMA IEEE NORMI Std. 81-1983 (izvorni znanstveni članak)

## CONTENTS

*Rajšl, I., Krajcar, S., Krpan, K.*  
APPLICATION OF MULTI-AGENT SYSTEMS IN ELECTRICITY MARKET SIMULATORS (review article)*Goić, R., Jakus, D., Mudnić, E.*  
CALCULATION OF ANNUAL ACTIVE ENERGY LOSSES IN A DISTRIBUTION NETWORK WITH A CONNECTED WIND POWER PLANT (original scientific article)*Vujević, D.*  
APPLICATION OF THE MÖBIUS STRIP IN ELECTRICAL ENGINEERING (preliminary information)*Čučić, B.*  
THE 3D CALCULATION OF THE QUASISTATIC MAGNETIC FIELD AROUND A CURRENT CARRYING CONDUCTOR AND FERROMAGNETIC PLATE BY MEANS OF INTEGRAL EQUATIONS (original scientific article)*Barić, T., Šljivac, D., Stojkov, M.*  
VALIDITY LIMITS OF THE EXPRESSION FOR MEASURING SOIL RESISTIVITY BY THE WENNER METHOD ACCORDING TO IEEE STANDARD 81-1983 (original scientific article)

06/07

642-675

676-699

700-711

712-729

730-753



Časopis je ubilježben u Ministarstvu znanosti, obrazovanja i sporta pod brojem 161 od 12.11.1992.

Časopis je indeksiran u sekundarnom bibliografskom izvoru INSPEC – The Institution of Electrical Engineering, England.

The magazine is registered with the Ministry of Science, Education and Sport under No. 161 since 12.11.1992.

The magazine is indexed with the secondary reference source of INSPEC – The Institution of Electrical Engineering, England.

## UREĐIVAČKA POLITIKA

Časopis Energija znanstveni je i stručni časopis s dugom tradicijom više od 50 godina. Pokriva područje elektroprivredne djelatnosti i energetike. Časopis Energija objavljuje izvorne znanstvene i stručne članke širokoga područja interesa, od specifičnih tehničkih problema do globalnih analiza procesa u području energetike.

U vrlo širokom spektru tema vezanih za funkcioniranje elektroprivredne djelatnosti i općenito energetike u tržišnim uvjetima i općoj globalizaciji, časopis ima poseban interes za specifične okolnosti ostvarivanja tih procesa u Hrvatskoj i njezinu regionalnom okruženju. Funkcioniranje i razvoj elektroenergetskih sustava u središnjoj i jugoistočnoj Europi, a posljedično i u Hrvatskoj, opterećeno je mnogobrojnim tehničko-tehnološkim, ekonomskim, pravnim i organizacijskim problemima. Namjera je časopisa da postane znanstvena i stručna tribina na kojoj će se kritički i konstruktivno elaborirati navedena problematika i ponuditi rješenja.

Časopis je posebno zainteresiran za sljedeću tematiku: opća energetika, tehnologije za proizvodnju električne energije, obnovljivi izvori i zaštita okoliša; korištenje i razvoj energetske opreme i sustava; funkcioniranje elektroenergetskoga sustava u tržišnim uvjetima poslovanja; izgradnja elektroenergetskih objekata i postrojenja; informacijski sustavi i telekomunikacije; restrukturiranje i privatizacija, reinženjering poslovnih procesa; trgovanje i opskrba električnom energijom, odnosi s kupcima; upravljanje znanjem i obrazovanje; europska i regionalna regulativa, inicijative i suradnja.

Stranice časopisa podjednako su otvorene iskusnim i mladim autorima, te autorima iz Hrvatske i inozemstva. Takva zastupljenost autora osigurava znanje i mudrost, inventivnost i hrabrost, te pluralizam ideja koje će čitatelji časopisa, vjerujemo, cijeniti i znati dobro iskoristiti u svojem profesionalnom radu.

## EDITORIAL POLICY

The journal Energija is a scientific and professional journal with more than a 50-year tradition. Covering the areas of the electricity industry and energy sector, the journal Energija publishes original scientific and professional articles with a wide area of interests, from specific technical problems to global analyses of processes in the energy sector.

Among the very broad range of topics relating to the functioning of the electricity industry and the energy sector in general in a competitive and globalizing environment, the Journal has special interest in the specific circumstances in which these processes unfold in Croatia and the region. The functioning and development of electricity systems in Central and South Eastern Europe, consequently in Croatia too, is burdened with numerous engineering, economic, legal and organizational problems. The intention of the Journal is to become a scientific and professional forum where these problems will be critically and constructively elaborated and where solutions will be offered.

The Journal is especially interested in the following topics: energy sector in general, electricity production technologies, renewable sources and environmental protection; use and development of energy equipment and systems; functioning of the electricity system in competitive market conditions; construction of electric power facilities and plants; information systems and telecommunications; restructuring and privatization, re-engineering of business processes; electricity trade and supply, customer relations; knowledge management and training; European and regional legislation, initiatives and cooperation.

The pages of the Journal are equally open to experienced and young authors, from Croatia and abroad. Such representation of authors provides knowledge and wisdom, inventiveness and courage as well as pluralism of ideas which we believe the readers of the Journal will appreciate and know how to put to good use in their professional work.

# UVOD

## INTRODUCTION

### Dragi čitatelji,

u rukama Vam je zadnji, šesti po redu, časopis Energija kojim zaključujemo izdavanje u 2007. godini. Objavljeno je 29 članaka koje potpisuje 71 autor iz Hrvatske i 11 autora iz inozemstva. Posebno je zadovoljstvo istaći kako je od ukupnog broja objavljenih članaka 9 članaka u kategoriji izvornih znanstvenih radova. Objavljeni članci odražavaju uređivačku politiku časopisa Energija, a uvjereni smo kako je moguće proširiti područja interesa i obuhvatiti različite aspekte regionalnog tržišta energije, ali i tržišta energije u Europskoj uniji i ostalim globalnim tržištima energije.

Tijekom 2008. godine očekuju nas značajni događaji na području restrukturiranja energetskega sektora u Republici Hrvatskoj, jugoistočnoj Europi, a očekuju se i značajni pomaci u definiranju energetske strategije u jugoistočnoj Europi i naravno u Europskoj uniji, što, nadamo se, predstavlja dovoljan motiv za nova istraživanja.

U ovom broju časopisa Energija, objavljujemo tri izvorna znanstvena članka, jedan pregledni i jedan članak kao prethodno priopćenje:

- Primjena višeagentskih sustava u simulatorima tržišta električnom energijom,
- Proračun godišnjih gubitaka radne energije u distribucijskoj mreži s priključenom vjetroelektranom,
- Primjena Möbiusove vrpce u elektrotehnici,
- 3D proračun kvazistatičkog magnetskog polja oko vodiča i feromagnetske ploče integralnim jednadžbama,
- Granice valjanosti izraza za mjerenja specifičnog otpora tla Wennerovom metodom prema IEEE normi Std. 81-1983.

U prvom članku opisuje se jedan noviji pristup simulaciji i analizi tržišta energije koji se razvio iz teorije igara. U uvodnom dijelu se postupno opisuju temeljna polazišta kao i razlike prema optimizacijskim modelima koji su još uvijek u vrlo širokoj uporabi u analizama tržišta. Višeagentski sustavi se temelje na pretpostavci da svaki sudionik utječe na ciljeve i ponašanje ostalih sudionika u igri, odnosno na tržištu za koje se također

### Dear Readers,

You are holding the sixth and final issue of the journal Energija for the year 2007. During the past year, we have published twenty-nine articles signed by seventy-one authors from Croatia and eleven authors from other countries. It is with particular satisfaction that we point out that nine of these articles were original scientific papers. The articles published express the editorial policy of the journal Energija. We are convinced that it is possible to expand the area of interest and encompass various aspects of the regional energy markets as well as those in the European Union and elsewhere.

During the year 2008, significant events are anticipated in the restructuring of the energy sector in the Republic of Croatia and South East Europe, as well as significant shifts in the definition of the energy strategy in South East Europe and the European Union, which, we hope, will provide sufficient occasion for new research.

In this issue of Energija, we are publishing three original scientific articles, one overview article and one article as preliminary information:

- Application of Multi-Agent Systems in Electricity Market Simulators,
- Calculation of Annual Active Energy Losses in a Distribution Network with a Connected Wind Power Plant,
- Application of the Möbius Strip in Electrical Engineering,
- A 3D Calculation of the Quasistatic Magnetic Field around a Current-Carrying Conductor and Ferromagnetic Plate by Means of Integral Equations,
- Validity Limits of the Expression for Measuring Soil Resistivity by the Wenner Method According to IEEE Standard 81-1983.

The first article presents a new approach to the simulation and analysis of electricity markets developed from the game theory. In the introductory section, there is a description of the current situation as well as the differences between this approach and the optimization models still widely used in market analyses. Multi-agent systems are based upon the assumption that each participant has an impact on the goals and behavior of the other participants in the game, i.e. in

može definirati određeni okvir. U radu se isto tako opisuje i jedan od najznačajnijih računarskih modela temeljenih na višegentskim sustavima tzv. EMCAS čija je implementacija u hrvatske znanstveno istraživačke organizacije kao i Hrvatsku elektroprivredu započela krajem 2007. godine.

Sasvim je jasno da priključak čak i malih izvora energije na distribucijsku mrežu izaziva promjene u tokovima snaga u mreži, a što se u konačnici očituje i kroz promjenu gubitaka radne energije. Proračun gubitaka radne energije, i to kada je na distribucijsku mrežu priključena vjetrolektrana, opisan je u drugom članku. U radu je isto tako razrađena metodologija proračuna godišnjih gubitaka radne energije, a kao model je analizirana realna mreža uz simuliranu vjetrolektranu. Analizirane su mnoge utjecajne veličine koje zasigurno imaju utjecaj na godišnji iznos gubitaka radne energije u mreži.

Treći članak opisuje pomalo neobičnu temu vezanu uz primjenu Möbiusove vrpce koja je na početku bila zanimljiva samo matematičarima i koju je osim u umjetnosti moguće primijeniti i u elektrotehnici. Uglavnom se njena primjena odnosi na izradu otpornika malih otpora i većih snaga, a posebna prednost pri izradi tih otpornika je mogućnost različitih oblika i to bez utjecaja pojedinih njihovih dijelova ili okolnih predmeta.

Model 3D magnetskog polja za slučaj vodiča i feromagnetske ploče opisan pomoću integralnih jednadžbi za kvazistatički slučaj prikazan je u četvrtom članku. Posebna vrijednost proračuna je činjenica kako se rezultati proračuna slažu s rezultatima mjerenja.

Posljednji članak bavi se analizom matematičkog izraza za prividni specifični otpor tla naveden u međunarodnoj normi IEEE Std. 81-1983. Naime, za analizu rezultata i obavljanje mjerenja specifičnog otpora tla inženjerima su dane na raspolaganje smjernice i nuputci različitih međunarodnih normi. Prilikom korištenja matematičkih izraza iz navedenih normi često nisu jasne okolnosti pod kojima su dobiveni navedeni izrazi. Jedan takav slučaj opisan je u ovom članku, a odnosi se na teorijski model i predviđanje mjernih rezultata dobivenih Wennerovim mjernim rasporedom elektroda. Iz tog razloga u članku je detaljno prikazan izvod izraza za prividni specifični otpor tla u slučaju kada se mjerenje obavlja Wennerovom mjernom tehnikom.

**Glavni urednik**  
**Mr. sc. Goran Slipac**

the market, for which a specific framework can also be defined. This article also provides a description of one of the most significant computer models, based upon the Electricity Market Complex Adaptive System (EMCAS), which began to be used in Croatian scientific research organizations as well as HEP in late 2007.

The connection of even small power sources to a distribution network causes redistribution in the load flows, ultimately evident in changes in the active energy losses. The calculation of active energy losses when a wind power plant is connected to a distribution network is described in the second article. A methodology has also been devised for calculating annual active energy losses, using an existing network with a simulated wind power plant as a model. Various values are analyzed that affect annual active energy losses in a distribution network.

The third article concerns a somewhat unusual topic in connection with the application of the Möbius strip, which initially was only of interest to mathematicians and which, in addition to the arts, is also applied in electrical engineering. The Möbius strip is generally used in low-ohm non-inductive resistors, particularly in high frequency devices. The specific advantage in the construction of such resistors is that they can be fashioned into various forms and shapes, without coupling electromagnetically to themselves or surrounding metallic objects.

The fourth article presents a 3D model of a magnetic field in the case of a conductor and ferromagnetic plate by means of integral equations in the quasistatic case. The particular merit of the calculation is the fact that its results are in agreement with measurement results.

The last article concerns the analysis of the mathematical expression for apparent soil resistivity provided in the international IEEE Standard 81-1983. Engineers have guidelines and instructions from various international standards at their disposal for the analysis of soil resistivity results and measurement. When using mathematical expressions from these standards, the circumstances under which they were obtained are not always clear. One such instance is described in this article and concerns a theoretical model and the prediction of the measurement results obtained by using the Wenner method of electrode arrangement. The derivation of the expression for apparent specific soil resistivity when measurement is performed using the Wenner method is presented in detail. An alternative expression is presented by the authors for the determination of the apparent resistivity of two-layer soil measured by the Wenner method, which takes the actual geometry of electrodes and other measurement procedures into account.

**Editor-in-chief**  
**Goran Slipac, MSc**

# PRIMJENA VIŠEAGENTSКИH SUSTAVA U SIMULATORIMA TRŽIŠTA ELEKTRIČNOM ENERGIJOM APPLICATION OF MULTI-AGENT SYSTEMS IN ELECTRICITY MARKET SIMULATORS

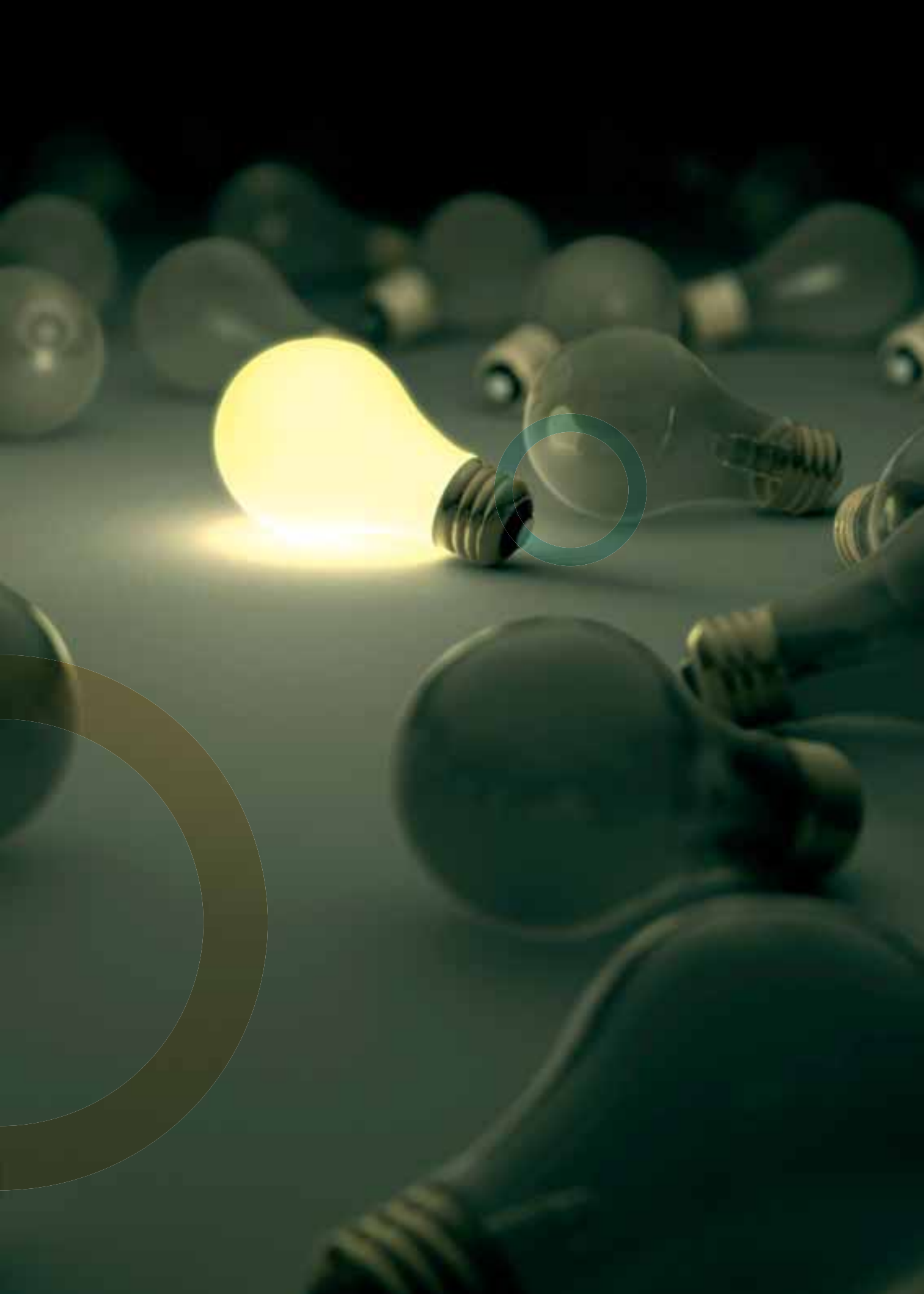
Ivan Rajšl, dipl. ing., Sveučilište u Zagrebu,  
Fakultet elektrotehnike i računarstva, Unska 3, 10000 Zagreb, Hrvatska  
Prof. dr. sc. Slavko Krajcar, Sveučilište u Zagrebu,  
Fakultet elektrotehnike i računarstva,  
Unska 3, 10000 Zagreb, Hrvatska  
Krešimir Krpan, dipl. ing., Emerson Network Power,  
Selska cesta 93, 10000 Zagreb, Hrvatska

Kako procesi liberalizacije i deregulacije tržišta električne energije diljem svijeta uzimaju sve više maha, tako se broj sudionika na tržištu, a ujedno i njihova raznolikost, naglo povećava. U tradicionalnom monopolističkom modelu tržišta svi su procesi, koji se odvijaju u elektroenergetskom sustavu (EES), bili pod nadzorom vertikalno integriranih kompanija. No, kako se tržišna logika mijenja od one usmjerene na što je niže moguće troškove proizvodnje električne energije na težnju k što većem profitu, tako se i rizik raspodjeljuje među svim tržišnim sudionicima podjednako i nije više u potpunosti na leđima krajnjih potrošača. U takvim nesigurnim uvjetima, u kojima se cijena električne energije mijenja iz sata u sat, svaki tržišni sudionik želi se osloniti na pomoć pouzdanog alata koji bi mu pomogao pri donošenju optimalnih i kvalitetnih odluka i strateških nastupa.

Since the liberalization and deregulation of the electricity markets throughout the world are in full swing, the number of market participants, as well as their diversity, is sharply increasing. In the traditional monopolistic market model, all the processes that occur in a power system have been supervised by vertically integrated companies. Since market logic is changing from that oriented toward minimizing generation costs for electrical energy to the trend of maximizing profit, the risk is being distributed among all the market participants uniformly and is no longer entirely borne by the final consumers. Under such uncertain conditions, in which the prices of electrical energy change from hour to hour, each market participant wants a reliable tool to facilitate optimal and quality decisions and strategic performance.

**Ključne riječi:** agenti, EMCAS simulacijski model, simulatori tržišta električne energije, tržište električne energije

**Key words:** agents, Electricity Market Complex Adaptive System (EMCAS), electricity market simulators, electricity market.



## 1 UVOD

Kako bi bilo moguće modelirati bilo koji ekonomski sustav nužno je poznavati mikro ponašanja sudionika u njemu, načine komunikacije i interakcije među sudionicima te globalne zakonitosti i pravilnosti promatranog ekonomskog sustava. Ekonomisti već stoljećima pokušavaju što je moguće bolje modelirati ekonomske procese. Takvi modeli trebali bi biti sposobni nositi se sa stvarnim problemima prisutnim u ekonomskim sustavima kao što su nesimetričnost informacija, nesavršena kompetitivnost, strateška interakcija, kolektivno učenje, mogućnost postojanja višestruke ravnoteže sustava i drugima. Naime, ekonomski život sastoji se od mnogo strateških interakcija među tvrtkama, kućanstvima, upravnim tijelima i drugima. Područja analize ponašanja tržišnih sudionika u ekonomiji naziva se teorijom igara (engl. *Game Theory*). Teorija igara analizira načine na koje dva ili više sudionika, odnosno dvije ili više strana, koje sudjeluju u takvoj strukturi kao što je tržište, odabiru poteze ili strategije koje imaju utjecaja na svakog sudionika. Ovu teoriju je razvio John von Neumann (1903.–1957.), mađarski matematički genij.

Za analizu i simulaciju ovakvih tržišnih stanja zasigurno je potrebno koristiti simulacijske alate koji prelaze okvire optimizacijskih modela koji su se koristili u većoj mjeri u monopolističkom okruženju, ali se i danas još uvijek koriste. Dosadašnji napredak u razvoju analitičkih i proračunskih alata omogućuje nove i naprednije pristupe kvantitativnim studijama ekonomskih sustava. Jedan od takvih pristupa je računski model ekonomskog sustava zasnovan na agentima (engl. *Agent-based Computational Economics*, ACE).

## 2 OPĆENITO O TRŽIŠTU

Tržište je ustrojstvo kojim kupci i prodavači međusobno djeluju da bi odredili ravnotežnu cijenu i količinu dobara ili usluga [1]. U tržišnoj ekonomiji niti jedan pojedinac ili organizacija nije odgovoran za proizvodnju, potrošnju, razdiobu i određivanje cijena. U tržišnom sustavu sve ima cijenu koja predstavlja vrijednost nekog dobra. Upravo te cijene usklađuju odluke proizvođača i potrošača na tržištu. Više cijene ohrabruju proizvodnju, ali dovode do smanjenja kupovine potrošača. Istodobno niže cijene ohrabruju potrošnju, ali obeshrabruju proizvodnju. Cijene su dakle kotač ravnoteže u tržišnom ustrojstvu.

## 1 INTRODUCTION

In order to model any economic system whatsoever, it is necessary to be acquainted with the micro behavior of the participants, the manner of communication and interaction among the participants and the global regularity of the economic system being studied. Economists have been trying to model economic processes accurately for centuries. Such models should be capable of confronting the actual problems present in economic systems such as information asymmetry, imperfect competition, strategic interaction, collective learning, the possibility of the existence of multiple-equilibrium systems etc. Economic life consists of many strategic interactions among companies, households, administrative bodies and others. The area of the analysis of the behavior of market participants in the economy is known as the game theory. The game theory analyzes the manner in which two or more participants, i.e. two or more sides who participate in a structure such as a market, choose moves or strategies that have an impact upon each participant. This theory was developed by the Hungarian mathematical genius John von Neumann (1903–1957).

For the analysis and simulation of such market states, it is certainly necessary to use simulation tools that exceed the framework of the optimization models that were used in monopolistic environments to a great extent but are also still in use today. Advances to date in the development of analytical and computational tools permit new and more advanced approaches to quantitative studies of economic systems. One such approach is agent-based computational economics, ACE.

## 2 GENERAL MARKET INFORMATION

A market is a structure according to which buyers and sellers mutually act in order to establish price equilibrium and the quantity of goods or services [1]. In a market economy, no individual or organization is responsible for the production, consumption, distribution and determination of prices. In a market system, everything has a price that represents the value of the commodity. These prices actually coordinate the decisions of the producers and consumers on the market. Higher prices encourage production but lead to a reduction in consumer purchases. At the same time, lower prices encourage consumption but discourage production. Prices are thus a balance wheel in the market structure.



Odlike tržišnog mehanizma potpuno se ostvaruju samo onda kad su prisutni nadzori i uravnotežena savršene konkurencije, što znači da niti jedno poduzeće ili potrošač nije sposobno utjecati na tržišnu cijenu. Suprotno tome, nesavršena konkurencija dovodi do cijena koje podižu troškove i smanjuju kupovinu potrošača ispod učinkovitih razina. Model sa suviše visokom cijenom i suviše niskom proizvodnjom obilježje je prisutnosti nesavršene konkurencije.

Kroz godine i godine tržište je evoluiralo od jednostavnih mjesta na kojima su se razmjenjivala dobra do virtualnih domena u kojima informacije kruže u elektroničkom obliku, tako da se danas ugovori o kupnji ili prodaji mogu sklopiti tek jednostavnim klikom miša na burzama prisutnim na internetu. No, unatoč svim tim, prvenstveno tehničkim promjenama, osnovni princip i namjena tržišta je ostala ista: tržište je mjesto sastajanja kupaca i prodavača koji pokušavaju ostvariti trgovinu po cijeni koja zadovoljava obadje strane.

### 3 ELEKTRIČNA ENERGIJA KAO SPECIFIČAN PROIZVOD

Kao i svaki drugi proizvod i električna energija je objekt trgovinske razmjene, no s nekim bitnim posebnostima. Razvoj tržišta električne energije zasniva se na pretpostavci da se električna energija može smatrati običnim proizvodom. Ipak postoje bitne razlike između nje i ostalih proizvoda kao što su na primjer energenti (nafta, plin i dr.). Razlika se prvenstveno očituje u brzini kojom se odvija razmjena električne energije i drugih proizvoda. Električna energija se prenosi brzinom svjetlosti, dakle gotovo trenutačno, dok je za razmjenu svih drugih dobara potrebno puno više vremena. Tako dinamičan sustav kao što je elektroenergetski zahtijeva jednakost proizvodnje i potrošnje u realnom vremenu.

Ukoliko takva jednakost iz bilo kojeg razloga nije prisutna može doći do sloma sustava koji za sobom povlači katastrofalne posljedice. Takvi poremećaji su apsolutno neprihvatljivi, ne samo zato što tržište električne energije prestaje s radom, nego i čitava zahvaćena regija ili država ostaje bez napajanja električnom energijom kroz nekoliko sati ili duže.

Vrijednost neisporučene električne energije (engl. *Value Of Lost Load* - VOLL) procjenjuje sa na iznose i do stotinu puta veće od vrijednosti isporučene električne energije. Zbog svih ovih razloga jasno je da upravljanje neravnotežom između potrošnje i proizvodnje električne energije mora

The characteristics of the market mechanism are only completely fulfilled when supervision and perfect competitive equilibrium are present, which means that no enterprise or consumer is capable of affecting the market price. On the contrary, imperfect competition leads to prices that raise costs and reduce consumer buying to below the effective levels. A model with an excessively high price and excessively low production is characteristic of the presence of imperfect competition.

Through the years, the market has evolved from a simple place where goods are exchanged to virtual domains in which information circulates in electronic form, so that contracts on buying or selling can be entered today with a simple mouse click on Internet markets. However, despite all of this, especially technical changes, the basic principle and purpose of the market have remained the same: the market is a meeting place for buyers and sellers who are attempting to conduct trade at a price that satisfies both sides.

### 3 ELECTRICITY AS A SPECIFIC PRODUCT

Like every other product, electricity is an object of market exchange but also has some important particularities. The development of the electricity market is based upon the assumption that electricity can be considered to be an ordinary product. Nonetheless, there are significant differences between it and other products such as, for example, energy-generating products (oil, gas etc.). The difference is primarily evident in the speed in which the exchange of electricity occurs, as opposed to other products. Electricity is transmitted at the speed of light, i.e. nearly instantaneously, while the exchange of all other goods requires much more time. A dynamic system such as an electricity system requires equal production (generation) and consumption in real time.

Insofar as such equality is not present for any reason whatsoever, a breakdown in the system may occur, leading to catastrophic consequences. Such disruptions are absolutely unacceptable, not merely because the electricity market ceases operations but because the entire affected region or country remains without its electricity supply for several hours or longer.

The value of lost load (VOLL) is estimated at amounts of up to a hundred times greater than the value of delivered electricity. For all these reasons, it is clear that the management of the imbalance between the consumption and generation of elec-

biti povjereno nezavisnom mehanizmu koji se ne oslanja na tržište i mora se provesti bez obzira na troškove koje iziskuje. No, mehanizam stvaranja cijene ne može djelovati dovoljno brzo da bi uspio uravnotežiti proizvodnju i potrošnju u realnom vremenu. Cijena električne energije se zbog toga kreira ili prije realnog vremena, *ex ante*, ili nakon realnog vremena, *ex post* [2].

Pri kupnji bilo kojeg drugog proizvoda kupac može ući u trag proizvođaču tog proizvoda. S električnom energijom nije takav slučaj. Tako potrošač nije u stanju koristiti energiju isključivo jednog proizvođača električne energije. Sva proizvedena energija se ujedinjuje, a to je moguće, jer ne postoji razlika između jedinica električne energije proizvedenih od različitih generatora. Ovo ujedinjenje je poželjno, jer dovodi do ekonomije razmjera: maksimalni ukupni proizvodni kapaciteti moraju biti razmjerni maksimalnoj agregatnoj (zbirnoj) potražnji. Ipak, mana je u tome što rušenje sustava u kojem se ujedinjuje električna energija utječe na sve sudionike tog sustava (ukoliko ne bi bilo ujedinjavanja tada bi ispad jednog generatora utjecao samo na potrošače koji troše električnu energiju koju on proizvodi).

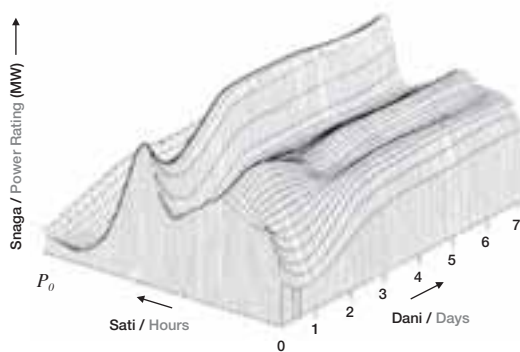
Potrošnja električne energije pokazuje određene pravilnosti u dnevnim i tjednim cikličkim varijacijama. Na slikama 1 i 2 se nalaze prikazi tjednih i mjesečnih dijagrama opterećenja [3].

Electricity must be entrusted to an independent mechanism that does not rely upon the market and must be conducted regardless of the costs that ensue. Nonetheless, the mechanism for creating prices cannot act quickly enough in order to succeed in balancing generation and consumption in real time. Therefore, electricity prices are created either prior to real time, *ex ante*, or after real time, *ex post* [2].

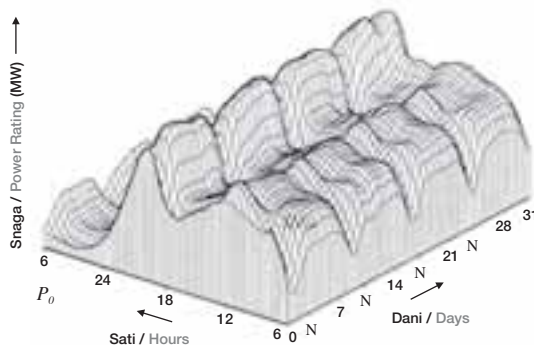
In purchasing any other product, a customer is able to trace the producer of that product. This is not the case with electrical energy. Thus, the consumer is not in a situation to use energy exclusively from one electricity generator enterprise. All the generated energy is pooled, which is possible because there is no difference between units of electrical energy produced by various generators. This pooling is desirable because it leads to an economy of scale the maximum total generation by the facilities must be proportionate to the maximum aggregate demand. Nonetheless, an inherent shortcoming is that a breakdown in a system in which there is pooling of electricity has an impact upon all the participants in that system (if there were no pooling, the breakdown of one generator would only affect the consumers who consume the electricity that it produces).

The consumption of electricity shows certain regularities in the daily and weekly cyclical variations. Figures 1 and 2 present weekly and monthly load diagrams [3].

**Slika 1**  
3D dijagram tjednog opterećenja  
Figure 1  
3D weekly load diagram



**Slika 2**  
3D dijagram mjesečnog opterećenja  
Figure 2  
3D monthly load diagram



Za razliku od drugih proizvoda koji se mogu skladištiti, električna energija se troši u trenutku kada se i proizvodi. Kako se potrošnja stalno mijenja potrebni su proizvodni kapaciteti koji mogu pratiti te promjene. Logično je dakle da neće svi proizvodni kapaciteti biti u pogonu tijekom čitavog dana. Za vrijeme niske potražnje u pogonu su samo najučinkovitije proizvodne jedinice, a manje učinkovite jedinice koriste se za pokrivanje vršnih opterećenja.

Karakteristike elektroenergetskog sustava moguće je opisati matematičkim funkcijama, zbog činjenice da je to interkonekcijski fizički sustav. To omogućava detaljnije ekonomsko modeliranje elektroenergetskog sustava nego što je to moguće u drugim područjima gospodarstva.

## 4 PROFITNA ORIJENTACIJA I PLANIRANJE NA TRŽIŠTU ELEKTRIČNE ENERGIJE

Elektroenergetski sektor proživljava burno razdoblje mijena i prestrukturiranja. Premda je velik broj vertikalno organiziranih monopolističkih energetske kompanija i dalje prisutan u svijetu, tržišne prilike i procesi liberalizacije i deregulacije vode k formiranju kakvog takvog tržišnog natjecanja. Naime, zbog posebnosti električne energije gotovo je nemoguće uspostaviti apsolutno kompetitivno tržište u kojem niti jedan tržišni sudionik ne bi mogao utjecati na iznos tržišne cijene električne energije. Pri tome se prijenos i distribucija električne energije podrazumijevaju kao prirodni monopoli u kojima uvođenje konkurencije ne bi bilo ekonomski opravdano.

Između ostalih promjena koje uzrokuje liberalizacija i deregulacija dolazi i do promjena u pristupu planiranja EES-a. Uvođenjem potpuno otvorenog tržišta električne energije nestalo je nekadašnje stabilno monopolističko stanje u kojem se cijena električne energije određuje uglavnom vladinim odlukama. Transformacijom ovih vertikalno integriranih, monopolističkih i uglavnom nacionalnih energetske kompanija uvodi se tržišni mehanizam i natjecanje i u elektroenergetski sektor. U novonastalim prilikama rizik više nije u potpunosti na leđima samih potrošača, nego se raspodjeljuje među svim tržišnim sudionicima. Razlog tomu je prvenstveno nova tržišna filozofija. Naime, umjesto minimiziranja troškova proizvodnje kao glavnog cilja kompanija u nacionalnom vlasništvu, tvrtke sudionici u elektroenergetskom sektoru počinju razmišljati potpuno tržišno u težnji da maksimiziraju svoj profit. Isto tako pojavila se potreba za korištenjem strateških alata u svrhu smanjenja

Unlike other products that can be stored, electrical energy is consumed at the moment that it is produced. Since consumption changes constantly, it is necessary to have generation facilities that can monitor these changes. It is logical that all the generation facilities will not be in operation throughout the entire day. For times of low demand, only the most efficient generating units are in operation, and the less efficient units are only used to cover peak loads.

The characteristics of a power system can be described by mathematical functions because it is an interconnected physical system. This facilitates more detailed economic modeling of the power system than is possible in other areas of the economy.

## 4 PROFIT ORIENTATION AND PLANNING ON THE ELECTRICITY MARKET

The electrical energy sector is experiencing a turbulent period of change and restructuring. Although a large number of vertically organized monopolistic energy companies still exist in the world, market conditions and the processes of liberalization and deregulation are leading to the formation of some market competition. Due to the specific nature of electrical energy, it is nearly impossible to establish an absolutely competitive market in which a single market participant could not affect the market price of electricity. Moreover, the transmission and distribution of electrical energy are understood as natural monopolies in which the introduction of competition would not be economically justified.

Among the other changes being brought about by liberalization and deregulation are changes in the approach to the planning of the power system. Through the introduction of a completely open electricity market, the formerly stable monopolistic state, in which the price of electricity was determined chiefly by government decisions, has disappeared. Through the transformation of these vertically integrated, monopolistic and generally government-owned energy companies, market mechanisms and competition are being introduced into the electricity sector. Under the new conditions, risk is no longer borne entirely by the consumers but is distributed among all the market participants. The reason for this is primarily the new market philosophy. Instead of minimizing generation costs as the main goal of companies under government ownership, company participants in the electrical energy sector are beginning to think in pure market terms in the pursuit of maximizing their profits. Similarly, the need has arisen for the use of strategic tools for the purpose

rizika nastupanja na tržištu. Cijena električne energije počinje varirati ne samo tijekom dana, nego je ovisna i o godišnjem dobu i atmosferskim prilikama.

Sposobnost što boljeg predviđanja buduće situacije, odnosno stanja na tržištu, od presudne je važnosti za tržišne sudionike u novonastalim prilikama. Uz energetska i tehnička vrlo je važna i ekonomska učinkovitost. Veoma je bitna i strategija za koju se pojedini sudionici odlučuju, jer u ovakvom okruženju postoji rizik raspodijeljen među svim tržišnim sudionicima, pa je naglašena potreba za pomoćnim alatom pri učinkovitom donošenju odluka i upravljanju rizicima. Upravo radi što boljeg predviđanja kretanja na tržištu te određivanja odgovarajućeg nastupa i poteza tržišnih sudionika važnu ulogu imaju simulatori tržišta, a u novije vrijeme i višeagentski sustavi koji se razlikuju od klasičnih simulatora tržišta u samom pogledu na tržište. Dok klasični simulatori gledaju na tržište kao na jednu cjelinu, višeagentski sustavi se koncentriraju na svakog sudionika posebno, a tržište se simulira kao posljedica međusobne interakcije nezavisnih programskih entiteta – agenata. Ipak, ovi agenti nisu potpuno nezavisni, jer njihove reakcije u nekoj mjeri ovise o reakcijama drugih agenata, čime se simulira stvarno stanje na tržištu, što upravo i jest njihov cilj.

Tek bi se nadljudskim sposobnostima mogla točno odrediti neka buduća situacija, no kvalitetno podešeni agenti uvijek će optimalno reagirati na novonastalu situaciju i sasvim je sigurno, da je u većoj prednosti onaj tržišni sudionik koji posjeduje kvalitetniji i inteligentniji programski alat – višeagentski sustav.

## 5 AGENTSKI MODEL I AGENTI

Agentski model je specifični, individualno bazirani proračunski model koji je u čvrstoj vezi s višeagentskim sustavima. Model se počeo razvijati od jednostavnog koncepta u 1940. godini. Glavna ideja vodilja jest stvoriti proračunski uređaj (najčešće zvan agent) koji bi oponašao stvarne pojave. Povijest agentskog modela seže još od Von Neumann-ovog stroja koji je trebao biti sposoban za reprodukciju.

Agentski model se zasniva na postojanju dinamičke interakcije između više agenata koji imaju svoje zadatke. Takav sustav unutar kojeg se vrši interakcija agenata sposoban je kreirati i oponašati kompleksne procese iz stvarnog života.

of reducing the risk of appearing on the market. The price of electrical energy has begun to vary not only within a week but is also according to the season and atmospheric conditions.

The ability to forecast future situations as accurately as possible, i.e. the market situation, is of crucial importance for market participants under the new conditions. In addition to energy and technical efficiency, economic efficiency is also very important. The strategy that an individual actor decides upon is very important because the risk is distributed among all the market participants under such circumstances. Therefore, there is a marked need for an auxiliary tool for effective decision making and risk management. In order to forecast trends on the market and determine the corresponding appearance and moves by market participants, market simulators have an important role. Recently, these have included multi-agent systems that differ from classical market simulators in their perception of markets. While classical simulators view a market as a whole, multi-agent systems concentrate on each participant separately, and a market is simulated as the consequence of the mutual interaction of independent program entities – agents. Nonetheless, these agents are not completely independent because their reactions to some degree are dependent upon the reactions of other agents, according to which the actual situation on the market is simulated, which is precisely the goal.

Some future situations could only be precisely predicted by superhuman abilities but properly attuned agents will always react in an optimal manner to a newly arisen situation. The market participant who possesses a quality and intelligent program tool – a multi-agent system – is certainly at an advantage.

## 5 AGENT-BASED MODELS AND AGENTS

An agent-based model is a specific, individually based computational model that is closely connected to multi-agent systems. This type of model developed from a simple concept discovered in 1940. The leading concept is to create a computational device, most frequently called an agent, which emulates actual phenomena. The history of the agent-based model can be traced back to the Von Neumann machine, which was supposed to be capable of reproduction.

An agent-based model is based upon the existence of dynamic interactions among several agents that have their own tasks. Such a system, in which the agents interact, is capable of creating and emulating complex processes from real life.

Agenti su prisutni posvuda i svaki dan ljudi se susreću s velikim brojem agenata (inteligentni agenti, informatički agenti, mobilni agenti i dr.). No, postavljaju se brojna pitanja: Što su to agenti? – Je li zbilja moguće na neki način uvesti red u očevidni nered koji nas okružuje? – Ima li nešto što je zajedničko svim agentima? – Kako organizirati agente da budu sposobni obavljati određene zadatke?

Izraz agent je prilično teško egzaktno definirati. Prema [4] agente se često opisuje kao entitete sa osobinama koje se smatraju korisnima u posebnim područjima. Tako inteligentni agenti mogu oponašati mentalne procese ili simulirati racionalno ponašanja; mobilni agenti su sposobni samostalno putovati kroz međusobno povezana okruženja kako bi ostvarili postavljene ciljeve; informacijski agenti mogu filtrirati i skladno organizirati raspršene podatke i podatke koji nisu srodni; autonomni agenti mogu bez nadzora obaviti neke funkcije.

Prema Russell-u i Norvig-u (2003.), agent je sve ono što senzorima opaža svoje okruženje i utječe na to okruženje pomoću izvršnih uređaja (aktuatora) [5].

Agenti koji se stalno trude optimizirati svoje postupke nazivaju se racionalnim agentima. Tako se među racionalne agente mogu svrstati ljudi (neka su recimo oči senzori, a ruke izvršni uređaji), roboti (imaju kamere kao senzore, a kotače kao izvršne uređaje) ili programski agenti kojima je grafičko sučelje i senzor i izvršni uređaj.

### 5.1 Svojstva agenata

Cilj brojnih istraživanja bio je upravo pronalazak nekog suvislog skupa osobina ili svojstava koje bi agenti mogli i trebali imati.

Uobičajena svojstva agenata su [4]:

- adaptivnost: sposobnost učenja i unapređivanja na temelju iskustva,
- samostalnost: orijentiranost k cilju, proaktivno i samoinicijativno ponašanje,
- suradničko ponašanje: sposobnost suradnje s drugim agentima sa svrhom ostvarenja zajedničkog cilja,
- sposobnost zaključivanja: sposobnost reagiranja na apstraktne zahtjeve zadatka.
- sposobnost komunikacije: sposobnost komunikacije s drugim agentima na način koji je sličniji ljudskoj komunikaciji nego standardnom simboličkom program-program protokolu,
- mobilnost: sposobnost prelaska u samostalno određenom smjeru s jedne na drugu domaćinsku platformu,

Agents are present everywhere. Every day, people encounter a large number of agents (intelligent agents, information agents, mobile agents etc.) However, numerous questions arise: What are these agents? Is it really possible to introduce some manner of order into the evident disorder that surrounds us? Do all agents share something in common? How can agents be organized in order to become capable of performing certain tasks?

The expression agent is fairly difficult to define exactly. According to [4], agents are often defined as entities with attributes considered useful in a particular domain. Such intelligent agents can emulate mental processes or simulate rational behavior. Mobile agents are capable of roaming networking environments in order to fulfill their goals, information agents can filter and coherently organize scattered and unrelated data, and autonomous agents can accomplish some functions without supervision.

According to Russell and Norvig (2003), an agent is anything that can be viewed as perceiving its environment through sensors and acting upon that environment through actuators [5].

Agents that constantly strive to optimize their behavior are called rational agents. Therefore, it is possible to include people (for some the eyes are sensors and the hands are actuators), robots (they have cameras as sensors and wheels as actuators) or program agents for whom the graphic interface is the sensor and actuator.

### 5.1 Agent attributes

The goal of numerous investigations has been precisely to find some meaningful set of properties or characteristics that agents could and should have.

The customary properties of agents are as follows [4]:

- adaptivity: the ability to learn and improve with experience,
- autonomy: goal-directedness, proactive and self-starting behavior,
- collaborative behavior: the ability to work with other agents to achieve a common goal,
- inferential capability: the ability to act on abstract task specifications,
- knowledge-level communication ability: the ability to communicate with other agents with language more resembling human-like speech acts than typical symbol-level program-to-program protocols,
- mobility: the ability to migrate in a self-directed way from one host platform to another,

- osobnost: sposobnost oponašanja manira ljudskog ponašanja,
- reaktivnost: sposobnost selektivnog percipiranja i djelovanja,
- vremenska trajnost: prisutnost agentova identiteta i stanja kroz dugi vremenski period.

## 5.2 Racionalni i reaktivni agenti

Agent se smatra racionalnim ako uvijek odabire reakcije koje optimiziraju mjeru učinkovitosti određenu od strane korisnika (mjera učinkovitosti je stupanj uspješnosti rješavanja zadatka koji je korisnik postavio). Te reakcije temeljene su na trenutačnom znanju i iskustvu agenta. Racionalni agenti nazivaju se još i inteligentnim agentima.

Neka je dan diskretni skup vremenskih intervala  $t=1, 2, \dots$ , u kojima agent mora izabrati optimalno djelovanje  $a_t$  iz konačnog skupa svih djelovanja  $A$  koja ima na raspolaganju. Kako bi mogao reagirati racionalno, agent mora uzeti u obzir kako prošlost tako i budućnost pri odabiru prikladnog djelovanja. Pri tome prošlost podrazumijeva dosadašnja agentova opažanja i sva djelovanja koja je primjenjivao do promatranog vremenskog intervala  $t$ . Budućnost se odnosi na agentova očekivana opažanja i očekivana djelovanja.

Ukoliko se sa  $o_t$  označi agentovo opažanje u vremenu  $T$  tada se prošlost uzima u obzira na način da za optimalan odabir djelovanja agent mora koristiti sva prošla opažanja  $o_t$  i sva prošla djelovanja  $a_t$  pri čemu je  $T \leq t$ . Funkcija:

$$\pi(o_1, a_1, o_2, a_2, \dots, o_t) = a_t, \quad (1)$$

zahtijeva pohranjivanje svih prošlih opažanja i djelovanja, pridružuje vremenskom intervalu  $t$  optimalno djelovanje  $a_t$  i naziva se agentovom smjernicom (engl. *policy*). Ovom funkcijom je riješen dio optimalnog donošenja odluka koji se odnosi na prošlost. No, definiranje ovakve funkcije i njezina praktična primjena nisu tako jednostavni kao što naoko izgleda. Parovi prošlih opažanja i djelovanja mogu biti veoma brojni i razlikuju se od zadatka do zadatka. Dakle, sama memorija stvara probleme jer mora biti golema a dodatni veliki problem leži u računskoj složenosti određivanja funkcije  $\pi$ .

Navedene činjenice zahtijevaju jednostavnije smjernice, odnosno jednostavniji princip po kojem agent odabire svoje postupke. Jedna od mogućnosti pojednostavljenja jest ignoriranje svih prošlih opažanja osim zadnjeg  $o_t$ , pa djelovanje  $a_t$  ovisi samo o tom zadnjem opažanju i određuje se novom funkcijom:

## 5.2 Rational and reactive agents

An agent is considered to be rational if it always chooses reactions that optimize the measure of efficiency determined by the user (a measure of efficiency is the degree of success in solving a task posed by the user). These reactions are based upon the current knowledge and experience of the agent. Rational agents are also called intelligent agents.

Let us assume a discrete set of time steps  $t=1, 2, \dots$ , in each of which the agent must choose the optimal action  $a_t$  from a finite set of all actions  $A$  that it has available. In order to react rationally, an agent must take into account both the past and future when choosing suitable action. The past is understood to mean the agent's perceptions up to the present and all the actions that it has applied up to time  $t$ . The future refers to the agent's expected perceptions and expected activities. If  $o_t$  represents the agent's perceptions at time  $T$  then the past is taken into account in such a manner that all past perceptions  $o_t$  and all past  $a_t$  actions must be used for the optimal choice of an action by the agent, where  $T \leq t$ . The function

requires the storage of all past perceptions and actions up to time  $t$  and an optimal action  $a_t$  and is called the agent's policy. According to this function, part of the optimal decision making is solved regarding the past. Nonetheless, the definition of such a function and its practical application are not as simple as they seem. Pairs of past perceptions and actions can be very numerous and differ from task to task. Thus, memory itself creates problems because it must be vast and additional major problems are inherent in the computational complexity of the determination of function  $\pi$ .

These facts require simpler policies, i.e. a simpler principle according to which the agent chooses its procedures. One of the possibilities for simplification is ignoring all the past perceptions except for the last one,  $o_t$ , so that action  $a_t$  depends solely upon the last perception and is determined by a new function:

$$\pi(o_t) = a_t.$$

(2)

Agent koji koristi ovakvu funkciju ovisnu samo o zadnjem opažanju naziva se reaktivnim agentom, a njegova smjernica naziva se reaktivnom ili bezmemorijskom. Sasvim prirodno se nameće pitanje koliko ovakav agent može biti učinkovit? Njegova neučinkovitost može biti zadovoljavajuća u posebnim vrstama okruženja.

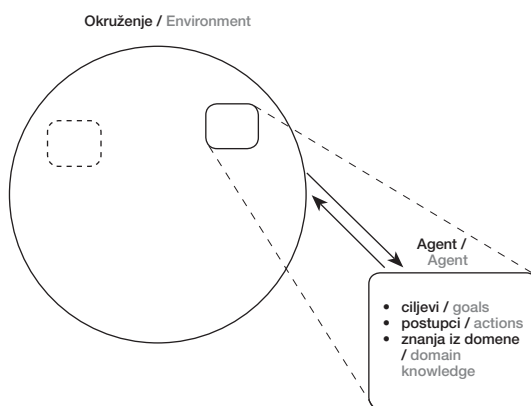
An agent that uses such a function dependent solely upon the last perception is known as a reactive agent, and its policy is called reactive or memoryless. It is quite normal to ask how such an agent can be efficient. Its efficiency can be satisfactory under certain types of environments.

### 5.3 Agentovo okruženje

Iz dosada navedenog je očigledno da su pojmovi agent i njegovo okruženje međusobno čvrsto povezani i niti jedan od njih ne može biti definiran bez onog drugog. Ponekad je čak teško odrediti razliku između agenta i okoline i promatrati ih odvojeno (slika 3).

### 5.3 Agent environments

In light of the above, it is evident that the concepts of an agent and its environment are firmly connected and neither of them can be defined without the other. Sometimes it is even difficult to determine the difference between the agent and the environment or to consider them separately (Figure 3).



**Slika 3**  
Agent i njegovo okruženje  
**Figure 3**  
An agent and its environment

Može se promotriti okruženje u kojem se nalazi više agenata i unutar kojeg oni opažaju, razmišljaju i djeluju. Kolektivna informacija o okruženju u nekom vremenskom intervalu  $t$  a koja se tiče trenutnog zadatka naziva se stanjem okruženja i označava sa  $s_t$ . Skup svih mogućih stanja u okruženju tada se označava sa  $S$ . Za primjer može poslužiti simulacija nogometne utakmice putem agenata (robota). Tako stanja okruženja mogu biti plan nogometnog igrališta, trenutni položaj, smjer i brzine agenata ili lopte, podaci koje pojedini agenti znaju jedni o drugima i drugi parametri bitni za donošenje odluke kao što je na primjer ukupno vrijeme koje je prošlo od početka utakmice.

It is possible to study an environment in which there are several agents and in which they perceive, consider and act. Collective information on the environment during any time step  $t$  regarding the current task is called the state of the environment and is indicated as  $s_t$ . The set of all the possible states in the environment is indicated as  $S$ . For example, it is possible to use a simulation of a soccer match via agents (robots). Thus, the state of the environment can be the plan of the soccer field, the current position, direction and velocity of the agents or the ball, data which individual agents know about the others and other parameters essential for decision making such as, for example, the total time that has elapsed since the beginning of the match.

Depending upon the nature of the problem, the environment can be discrete (there is a finite number

Ovisno o prirodi problema okruženja mogu biti diskretna (postoji konačan broj stanja) ili kontinuirana (neprekidna s beskonačno mnogo stanja).

Osnovni način kojim se karakterizira okruženje iz agentove perspektive jest njegova percepcija. Okruženje je potpuno mjerljivo pojedinom agentu ako trenutačno opažanje tog agenta ( $o_t$ ) potpuno otkriva trenutačno stanje okruženja ( $s_t$ ), tj. ukoliko je:

---

$$O_t = S_t. \tag{3}$$

---

S druge strane, u djelomično mjerljivom okruženju trenutačno opažanje agenta pruža samo djelomičnu sliku trenutačnog stanja okruženja i to u formi uvjetne distribucije vjerojatnosti  $P(s_t|o_t)$ . To znači da trenutačno opažanje agenta ne otkriva potpuno stanje okruženja, ali istodobno agent svakom stanju  $s_t$  pridružuje vjerojatnost  $P(s_t|o_t)$  koja kazuje koliko je vjerojatno da je baš  $s_t$  pravo stanje okruženja. Pri tome vrijedi:

---

$$0 \leq P(s_t|o_t) \leq 1 \tag{4}$$

---

i and

---

$$\sum_{s_t \in S} P(s_t|o_t) = 1. \tag{5}$$

---

Ovdje je dakle varijabla  $s_t$  slučajna varijabla koja može poprimiti sve vrijednosti iz skupa  $S$  sa određenom vjerojatnošću  $P(s_t|o_t)$ .

Postoje dva glavna razloga koja mogu dovesti do djelomične mjerljivosti okruženja. Prvi razlog je šum ili smetnje u sensorima putem kojih agent opaža i mjeri okolinu, a drugi je percepcijsko preklapanje, tj. dva različita stanja agentu mogu biti jednaka.

U potpuno mjerljivom okruženju funkcija po kojoj agent odlučuje o načinu djelovanja je pridruživanje pojedinih djelovanja pojedinim stanjima okruženja. Veoma je korisna činjenica da u većini slučajeva stanje okruženja u nekom vremenskom intervalu omogućuje potpuni opis prošlosti. Takvo okruženje koje ima sposobnost sakupljanja svih prošlih informacija u svojem stanju naziva se Markovim

of states) or continuous (there is an infinite number of states).

The basic manner in which an environment is characterized from the agent's perspective is the agent's perception. The environment is completely measurable by an individual agent if the current perception of that agent ( $o_t$ ) fully reveals the current state of the environment ( $s_t$ ), i.e. insofar as

From the other side, in a partially measurable environment, the current perception of an agent only provides a partial picture of the current state of the environment and this in a form of a conditional probability distribution  $P(s_t|o_t)$ . This means that the current perception of an agent does not reveal the complete state of the environment but at the same time the agent simultaneously assigns probability  $P(s_t|o_t)$  to each state  $s_t$  which indicates the probability that precisely  $s_t$  is the true state of the environment. The following expressions apply:

Here variable  $s_t$  is a random variable that can assume all the values from set  $S$  with a specified probability  $P(s_t|o_t)$ .

There are two main reasons that can lead to the partial measurability of an environment. The first reason is the noise or interference in the sensors via which the agent perceives and measures the environment, and the second is perceptual aliasing, i.e. two different states may seem to be the same to the agent.

In a fully measurable environment, the function according to which the agent decides upon the manner of action is the mapping of the individual parts of an environmental state. It is a very useful fact that in the majority of cases the state of the environment at some time step permits the complete description of the past. Such an environment that has the ability of gathering all the past information in its state



okruženjem ili se kaže da ima Markovo svojstvo (Andrei Andreyevich Markov (1856. – 1922.) ruski matematičar). Tako u Markovom okruženju agent može koristiti bezmemorijske postupke donošenja odluka o djelovanju.

#### 5.4 Prijelazni model

Dosada je opisan utjecaj prošlih iskustava agenta i njegovog okruženja na njegovo odlučivanje. No, kao što je već rečeno za donošenje optimalnih odluka potrebno je uzeti u obzir i budućnost.

U svakom vremenskom intervalu  $t$  agenta dakle odabire djelovanje  $a_t$  iz konačnog skupa djelovanja  $A$ . Naravno da se pod utjecajem tog agentovog djelovanja mijenja i okruženje agenta. Prijelazni model precizira način na koji se okruženje mijenja pod utjecajem djelovanja agenta.

Ako je trenutačno stanje okruženja  $s_t$ , a agent se odluči za djelovanje  $a_t$ , tada se mogu razlikovati sljedeća dva slučaja okruženja:

- determinističko okruženje u kojem prijelazni model pridružuje paru  $(s_t, a_t)$  jedinstveno novo stanje  $s_{t+1}$ . Tako u šahu na primjer svaki potez mijenja postavu na polju na deterministički način. Poznavajući dakle stanje okruženja i budući potez agenta u determinističkom okruženju jednoznačno je određeno buduće stanje okruženja.
- stohastičko okruženje u kojem prijelazni model pridružuje paru  $(s_t, a_t)$  određenu distribuciju vjerojatnosti  $P(s_{t+1}|s_t, a_t)$ . Pri tome je  $s_{t+1}$  slučajna varijabla koja može poprimiti sve vrijednosti iz skupa određenih stanja  $S$  i to sa pripadajućom vjerojatnošću  $P(s_{t+1}|s_t, a_t)$ . Uz poznato stanje okruženja i budući potez agenta u stohastičkom okruženju nije jednoznačno određeno buduće stanje okruženja, nego su poznate vjerojatnosti pojavljivanja određenih stanja okruženja.

Većina aplikacija koje oponašaju stvarni svijet zahtijevaju stohastički prijelazni model koji unosi dodatne poteškoće i još više kompliciraju proces optimalnog odlučivanja agenta.

Većinom je krajnji cilj kojem agent teži neko željeno stanje okruženja. Tako je planiranje zapravo definiranje optimalnog puta kroz sva moguća stanja prema željenom stanju. U determinističkom se okruženju podrazumijeva da agent daje prednost stanjima koja su bliža željenim. Mnogo općenitije, agent može imati različite sklonosti prema različitim stanjima.

is called a Markov environment or it is said to have the Markov property (Andrei Andreyevich Markov, 1856–1922, a Russian mathematician). Thus, an agent can use memoryless procedures in deciding upon an action in a Markov environment.

#### 5.4 Transition model

Thus far, the impact of the agent's past experiences and the environment upon the agent's decision making has been described. However, as previously mentioned, it is also necessary to take the future into account in order to make optimal decisions.

In every time step  $t$  the agent chooses an action  $a_t$  from a finite set of activities  $A$ . Naturally, under the influence of that agent's action, the agent environment changes. A transition model specifies the manner in which the environment changes under the impact of the action of an agent.

If the current state of the environment is  $s_t$  and the agent decides upon action  $a_t$ , it is then possible to distinguish the following two environmental cases:

- a deterministic environment in which the transition model maps a state-action pair  $(s_t, a_t)$  to a single new state  $s_{t+1}$ . Thus in chess, for example, every move changes the configuration on the board in a deterministic manner. Being acquainted with the state of the environment and the future move of an agent in a deterministic environment unambiguously determines the future state of the environment,
- a stochastic environment in which the transition model maps a state-action pair  $(s_t, a_t)$  to a specific probability distribution  $P(s_{t+1}|s_t, a_t)$ . Here  $s_{t+1}$  is a random variable that can assume all the values from the set specific states  $S$  and this with the corresponding probability  $P(s_{t+1}|s_t, a_t)$ . In addition to the known state of the environment and the future move of the agent in a stochastic environment, the future state of the environment is not unambiguously determined but the probabilities of the occurrence of certain states of the environment are known.

The majority of the applications that emulate the real world require a stochastic transition model that introduces additional difficulties and further complicates the process of optimal decision making by the agent.

For the majority, the final goal to which the agent aspires is some desired state of the environment. Thus, planning is actually defining the optimal path through all the possible states toward the desired state. In a deterministic environment, it is understood that an agent affords preference to states that are close to the desired one. Much more generally, an agent may have various preferences toward various states.

### 5.5 Sklonosti agenata

Kako bi se formulirao ovaj pojam sklonosti agenata po jedinim stanjima, svakom stanju  $s$  se pridodaje realan broj  $U(s)$  koji predstavlja sklonost agenta tom specifičnom stanju okruženja. Tako je  $U(s) > U(s')$  ako i samo ako je agent skloniji stanju  $s$  od stanja  $s'$  i  $U(s) = U(s')$  ako i samo ako je agent jednako sklon prema oba stanja.

Ako se pretpostavi da agent ima ugrađene sklonosti prema po jedinim stanjima, postavlja se pitanje kako agent može te sklonosti učinkovito iskoristiti pri donošenju odluka. Dakle, pretpostavljeno okruženje je stohastičko kao i prijelazni model,  $P(s_{t+1}|s_t, a_t)$ , a agent se nalazi u stanju  $s_t$  i pokušava odrediti djelovanje  $a_t$ . Neka je  $U(s)$  sklonost ovog agenta (koji je jedini u promatranom okruženju) prema stanju  $s$ .

Donošenje odluka bazirano na sklonostima temelji se na pretpostavci da optimalno djelovanje agenta  $a_t^*$  treba maksimizirati očekivanu sklonost:

$$a_t^* = \arg \max_{a_t \in \mathcal{A}} \sum_{s_{t+1}} P(s_{t+1}|s_t, a_t) \cdot U(s_{t+1}). \quad (6)$$

Kako bi se ocijenilo koliko je pojedino djelovanje dobro, potrebno je pomnožiti sklonost ka postizanju nekog stanja sa vjerojatnošću postizanja tog stanja i sumirati sve dobivene vrijednosti za to djelovanje. Postupak se obavlja za sva moguća djelovanja i potom se optimalno djelovanje  $a_t^*$  određuje na temelju najveće dobivene sume.

Ako svako stanje ima pridodanu vrijednost sklonosti agenta za postizanje tog stanja, agent može na naveden način odrediti optimalna djelovanja za sva moguća stanja. Tako agent posjeduje funkciju po kojoj svakom stanju pridružuje odgovarajuće djelovanje na optimalan način. Optimalna smjernica (funkcija) djelovanja agenta može se zapisati na sljedeći način:

$$\pi^*(s) = \arg \max_a \sum_{s'} P(s'|s, a) U^*(s'), \quad (7)$$

gdje je  $U^*(s)$  skup najviših ostvarivih sklonosti (optimalnih sklonosti).

### 5.5 Agent preference

In order to formulate this concept of agent preference toward individual states, to each state  $s$  a real number  $U(s)$  is added that represents the preference of the agent toward a specific environmental state. Thus,  $U(s) > U(s')$  if and only if the agent has a greater preference toward state  $s$  than toward state  $s'$  and  $U(s) = U(s')$  if and only if the agent has an equal preference toward both states.

If it is assumed that the agent has intrinsic preferences toward individual states, the question is posed how the agent can use these preferences effectively in making decisions. The assumed environment is stochastic, as is the transition model  $P(s_{t+1}|s_t, a_t)$ . The agent is situated in state  $s_t$  and attempts to determine action  $a_t$ . Let  $U(s)$  represent the preference of this agent (who is the only one in the environment being studied) toward state  $s$ .

Decision making is based upon preferences based upon the assumption that the optimal action of the agent  $a_t^*$  should maximize the anticipated preference:

In order to assess the goodness of an individual action, it is necessary to multiply the preference toward the achievement of some state by the probability of achieving this state and add together all the values obtained for this action. This procedure is performed for all possible actions and optimal action  $a_t^*$  is determined on the basis of the highest sum obtained.

If every state has the added value of the preference of the agent for achieving this state, the agent can determine the optimal action for all possible states in the previously described manner. Thus, an agent possesses a function according to which the corresponding action is added to each state in the optimal manner. The optimal policy (function) of the agent's action can be expressed as follows:

where  $U^*(s)$  is the set of the greatest feasible preferences (optimal preferences).

## 5.6 Neke moguće podjele agenata

Agenti se mogu podijeliti na jake i slabe agente [6]. Slabi agenti koriste se pri rješavanju nekih inženjerskih tipova problema gdje je potrebno nešto malo inteligencije (niža razina složenosti problema). Jaki agenti su sposobni oponašati neke ili sve osobine ljudskog uma (vrlo visoka razina složenosti problema).

Slabi agenti većinom posjeduju autonomnost (nema potrebe za ljudskim nadzorom), socijalne sposobnosti (mogućnost komunikacije s drugim agentima), reaktivnost (reagiraju na promjene u okruženju) i proaktivnost (sposobnost poduzimanja inicijative). Jaki agenti posjeduju više svojstava, kao što su znanje, usađena uvjerenja, namjere ili želje.

Sljedeća razlika može se podvući između agenata šireg djelokruga (engl. *broad*) i onih fokusiranih ili specijaliziranih agenata. Specijalizirani agenti su posvećeni posebnom zadatku ili okruženju i zahtijevaju razvijanje algoritma prilagođenog tom specijalnom zadatku. Oni nemaju sposobnost prilagođavanja i učinkovito rješavaju samo one probleme za koje su predviđeni.

Agenti šireg djelokruga su općenitiji i posjeduju širok raspon različitih sposobnosti. Njihovo djelovanje je prilično plitko jer nisu posebno specijalizirani niti za jedan zadatak.

Neki agenti su stvarno fizički prisutni, tj. utjelovljeni su (to su uglavnom roboti koji imaju kamere i druge vrste senzora i motore kao aktuatora). Drugi pak agenti nisu utjelovljeni i nisu prisutni u stvarnom svijetu. To su programski agenti koji djeluju unutar svijeta simulacije i nemaju fizičkih dijelova. Programski se agenti susreću s manje problema, jer se njihovi senzori i aktuatori mogu podesiti po volji učinkovitima.

## 5.7 Arhitektura agenata

Arhitektura agenta je zapravo struktura njegova programa (slika 4).

Model samostalnog (u smislu ostvarenja cilja) agenta sastoji se iz osam jedinica i uključuje [7]:

- jedinicu za opažanje (engl. *perception unit*),
- jedinicu za obradu (engl. *process unit*),
- kontrolnu jedinicu (engl. *control unit*),
- djelatnu jedinicu (engl. *action unit*),
- jedinicu za komunikaciju (engl. *communication unit*),
- jedinicu za razumijevanje (engl. *knowledge unit*),
- računsku jedinicu (engl. *compute unit*),
- jedinicu s podacima (engl. *data unit*).

## 5.6 Some possible agent classifications

Agents can be classified as strong or weak [6]. Weak agents are used in solving some engineering types of problems where some intelligence is required (a lower level of problem complexity). Strong agents are capable of emulating some or all of the characteristics of the human mind (a very high level of problem complexity).

The majority of weak agents possess autonomy (do not require human supervision), social abilities (the ability to communicate with other agents), reactivity (react to changes in the environment) and proactivity (the ability to take initiatives).

Strong agents possess more attributes, such as knowledge, belief, intention or desires.

The following distinction can also be made between broad agents and focused or specialized agents. Specialized agents are devoted to a particular task or environment and require the development of an algorithm adapted to the special task. They lack the ability to adapt and can only solve those problems efficiently for which they are intended.

Broad agents are more generalized and have a broad range of various abilities. Their action is fairly shallow because they are not specialized for a specific task.

Some agents are actually physically present, i.e. they are embodied (mainly robots that have cameras and other types of sensors and motors as actuators). Other agents are not embodied and are not present in the real world. These are program agents that act within the world of simulation and lack physical parts. Program agents encounter fewer problems because their sensors and actuators can be adjusted to the desired efficiencies.

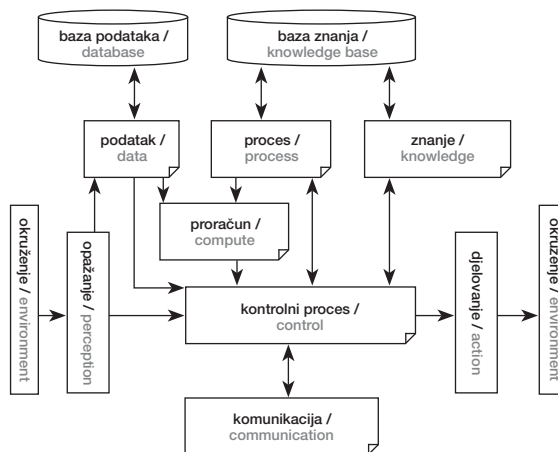
## 5.7 Agent Architecture

Agent architecture is actually the structure of its agent program (Figure 4).

A model of an independent (in the sense of achieving goals) agent consists of eight units, as follows [7]:

- perception unit,
- process unit,
- control unit,
- action unit,
- communication unit,
- knowledge unit,
- compute unit,
- data unit.

**Slika 4**  
Arhitektura  
samostalnog agenta  
Figure 4  
Goal autonomous  
agent architecture



Jedinica za opažanje očitava podatke iz agentovog okruženja. Ona sadrži listu pojedinačnih stanja koja definiraju ukupno stanje okruženja. Ukoliko se neko od pojedinih stanja promijeni, lista podataka se ažurira te se obavještava kontrolnu jedinicu o promjenama kako bi poduzela odgovarajuće mjere.

Jedinica za obradu sadrži cilj ili više ciljeva te njihove međusobne odnose.

Djelatna jedinica sadrži sve djelatnosti koje je agent sposoban obaviti.

Kontrolna jedinica odlučuje koje će se djelatnosti obaviti radi ostvarenja cilja kojeg također ona odabire. Ukoliko jedinica za opažanje uoči promjene u okruženju, tada kontrolna jedinica aktivira reakcijska djelovanja na te promjene.

U računskoj jedinici su definirane funkcije kojima se odabiru ciljevi i optimalna djelovanja. Također sadrži algoritme i mehanizme odabiranja optimalnih djelovanja.

Kontrolna jedinica poziva funkcije iz računске jedinice kako bi se odredio slijedeći cilj i prikladna djelovanja.

Jedinica za razumijevanje nadgleda dio odgovoran za znanje agenta koje se primjenjuje pri rješavanju stvarnih problema.

Jedinica s podacima omogućava pristup svim mehanizmima u bazu podataka.

Komunikacijska jedinica definira načine komunikacije između agenata.

The perception unit reads data from the agent's environment. It contains a list of individual states that define the overall state of the environment. If some of the individual states change, the data list is updated and the control unit is informed of the changes in order to undertake the suitable measures.

The process unit consists of a goal or several goals and their mutual relationships.

The action unit contains all the actions that the agent is capable of performing.

The control unit decides which actions will be performed in order to achieve the goal that it also chooses. If the perception unit detects changes in the environment, the control unit activates a reactive action against the changes.

In the compute unit, functions are defined by which goals and optimal action are selected. It also contains algorithms and mechanisms for selecting optimal actions.

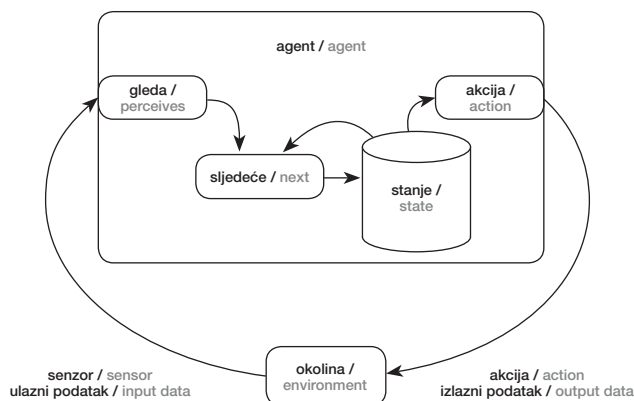
The control unit will call the functions in the compute unit according to a signal from the process unit.

The knowledge unit monitors the part responsible for the knowledge of the agent which is applied to solving actual problems.

The data unit facilitates access to all the mechanisms in the data base.

The communication unit defines the manner of communication among agents.

**Slika 5**  
Arhitektura samostalnog agenta orijentiranog k cilju  
Figure 5  
Goal autonomous agent architecture



Kao što slika 5 [8] još jedanput naglašava, osnovni dijelovi agenta prema funkcijama koje obavljaju su:

- dio za opažanje (senzor),
- akcijski dio.

Prema arhitekturi agenti se mogu podijeliti na sljedeće vrste [9]:

- promišljajući agenti,
- reaktivni agenti,
- uvjerenje-želja-namjera arhitekture (BDI, engl. *Beliefs, Desires, Intentions*),
- slojeviti agenti.

Promišljajući agenti koriste, kao što im samo ime i govori, svjesno odlučivanje, odnosno logičku dedukciju i matematičku logiku pa se mogu koristiti pri dokazivanju teorema. Kako ne mogu proučavati promjene okruženja koje nastaju njihovim djelovanjem, nisu sposobni za simulaciju događaja u stvarnom vremenu.

Reaktivni agenti reagiraju na poticaje iz okoline u koju su smješteni. Jednostavni su i moguće je pratiti računanje, ali nemaju sposobnost učenja tako da se pri odlučivanju o djelovanju koriste samo podaci dobiveni opažanjem agentova okruženja.

As Figure 5 [8] reemphasizes, the basic parts of the agent according to the functions they perform are as follows:

- sensor,
- action part.

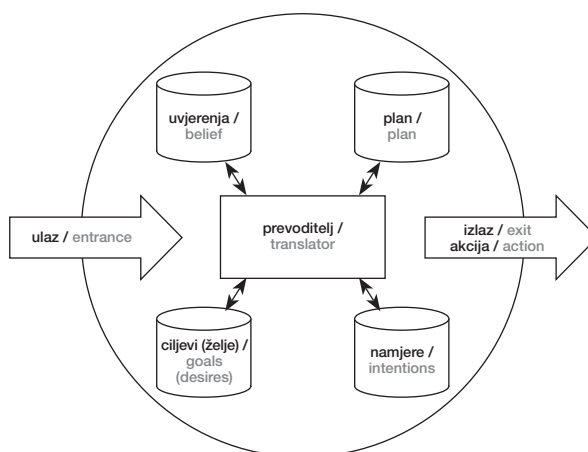
According to the architecture, agents can be classified into the following types [9]:

- deliberative agents,
- reactive agents,
- beliefs, desires and intentions (BDI),
- layered agents.

Deliberative agents, as their name implies, use deliberative decision making, i.e. logical deduction and mathematical logic, and can be used in proving theories. Since they cannot take into account changes in the environment that occur due to their action, they are incapable of simulating events in real time.

Reactive agents react to stimuli from the environment in which they are located. They are simple and the computation process can be monitored but they do not have the ability to learn. In decision making regarding action, they only use data obtained from the perception of the agent's environment.

**Slika 6**  
Agent temeljen na  
BDI arhitekturi  
**Figure 6**  
Agent based upon  
BDI architecture



Na slici 6 se nalazi forma agenta temeljenog na BDI arhitekturi. BDI arhitektura agenta zasniva se na praktičnom zaključivanju. Odlučuje se o ciljevima koje treba postići i na koji način će biti postignuti. Agenti su ustrajni u svojim namjerama i one ograničavaju buduće promišljanje. Iz namjera također proizlazi svrhovito promišljanje.

Slojevite arhitekture koriste se dekompozicijom problema na dijelove, a svakom od njih se dodjeljuje određeno ponašanje. Topologija slojeva podijeljena je s obzirom na razmjenu kontrolnih podataka. Postoji horizontalna i vertikalna topologija.

Figure 6 presents the form of an agent based upon BDI architecture. BDI agent architecture is based upon practical conclusion making. Decisions are made on goals that must be achieved and in what manner they will be achieved. Agents are consistent in their intentions and they limit future deliberations. Goal based deliberation also issues from the intentions.

Layered architecture is used for the decomposition of problems into parts, and each of them is assigned certain behavior. The topology of the layers is divided according to the exchange of control data. There are horizontal and vertical topologies.

## 6 VIŠEAGENTSKI SUSTAVI

Višeagentski sustavi, MAS (engl. *Multiagent Systems*) spadaju u područje proučavanja umjetne inteligencije, AI (engl. *Artificial Intelligence*) koje se bavi načinima konstrukcije složenih sustava koji koriste veći broj agenata te usklađivanjem ponašanja tih agenata [9]. To je područje proučavanja raspodijeljene umjetne inteligencije (engl. *Distributed Artificial Intelligence DAI*).

Postoje brojna područja koja zahtijevaju uporabu višeagentskih sustava. Tako se ovakvi sustavi koriste u zahtjevnim računalnim igrama, problemima transporta, grafičkim problemima, GIS (Geografski informacijski sustav – *Geographic Information System*) sustavima te u mnogim drugim područjima. Ukoliko se problem svodi na veći broj ljudi ili organizacija s različitim (moguće i proturječnim) ciljevima i zasebnim informacijama, tada je nužna uporaba višeagentskih sustava kako bi se upravljalo njihovom međudjelovanjem. Takvo područje je zasigurno i tržište električne energije.

## 6 MULTI-AGENT SYSTEMS

Multi-agent systems (MAS) are part of the field of computational artificial intelligence, AI, which is engaged in the manner of the construction of complex systems that use a large number of agents and coordinate the behavior of these agents [9]. This is the area of the study of distributed artificial intelligence, DAI.

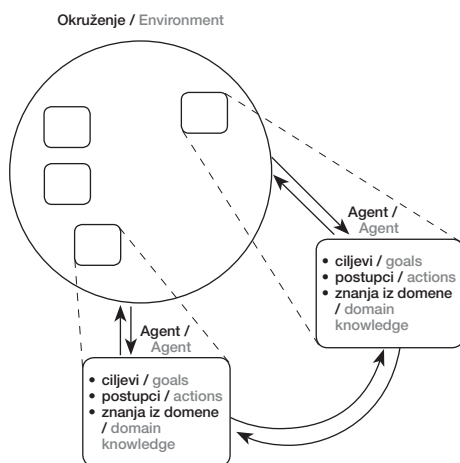
There are numerous areas that require the use of multi-agent systems. These systems are used in demanding computer games, transport problems, graphic problems, GIS (Geographic Information System) systems and many other areas. If a problem involves a large number of persons or organizations with various (possibly also contradictory) goals and separate information, it is then necessary to use multi-agent systems in order to manage their interactions. The electricity market is certainly such an area.

Višeagentski sustav se razlikuje od onog u kojem je samo jedan agent u postojanju većeg broja agenata od kojih svaki utječe na ciljeve i djelovanja svih drugih (promatrano iz perspektive jednog agenta ostali su njegovo okruženje). Također postoji mogućnost direktne interakcije (komunikacije) između dva ili više agenata. Ta interakcija agenata može biti promatrana kao dio okruženja ili potpuno odvojeno od okruženja agenata.

Iz perspektive jednog agenta stvari se dramatično kompliciraju ulaskom u višeagentski sustav s obzirom na situaciju kada je potpuno sam u svom okruženju. Naime ovdje svi ostali agenti svojim djelovanjima utječu na promjenu okruženja. Na slici 7 nalazi se prikaz dva agenta koji se nalaze u istom okruženju i pri čemu svaki ima svoje ciljeve (međusobno različite), postupke djelovanja i znanja iz određene domene. Na istoj slici prikazana je i mogućnost direktne komunikacije između ova dva agenta.

A multi-agent system differs from a system in which there is only one agent due to the presence large number of agents, each of which influences the goals and actions of all the others (from the perspective of one agent the other constitute its environment). There is also the possibility of direct interaction (communication) among two or more agents. This agent interaction can be studied as a part of the environment or completely separated from the agent environment.

From the perspective of an agent, matters become dramatically more complicated by entering a multi-agent system due to the situation when it is completely alone in its environment. All the other agents here influence change in the environment with their actions. In Figure 7, two agents are presented that are in the same environment and each has its own goals (mutually different), action procedure and knowledge of a certain domain. In the same figure, possibilities are presented for direct communication between these two agents.



**Slika 7**  
Dva agenta u istom okruženju  
**Figure 7**  
Two agents in the same environment

Sasvim općenito, moguće je postojanje po volji velikog broja agenata koji se međusobno više ili manje razlikuju i mogu, ali i ne moraju, imati mogućnost komunikacije s ostalim agentima.

Čest je slučaj da se agenti, koji sačinjavaju isti višeagentski sustav, bitno razlikuju jedni od drugih. Tipičan primjer su programski agenti (engl. *softbot*) koji se razlikuju u realizaciji od strane različitih dizajnera. Općenito, razlike mogu biti bilo hardverske bilo softverske. Ovakvi agenti nazivaju se heterogenima za razliku od homogenih koji su dizajnirani na identičan način.

U višeagentskom sustavu prisustvo većeg broja agenata uzrokuje veću dinamičnost okoline, a time i složenost promatranog problema.

Quite generally, it is possible for a large number of agents to exist, as desired, who mutually more or less differ and can, but not necessarily, have the possibility of communicating with the other agents.

It is frequently the case that agents comprising the same multi-agent system differ from each other significantly. Typical examples are program agents (software robots or softbots), which differ according to the designers. Generally, differences can exist in hardware or software. Such agents are called heterogeneous, in contrast to homogeneous agents that are designed in the identical manner.

In a multi-agent system, the presence of a large number of agents makes the environment more dynamic and thereby increases the complexity of the problem studied.

Ukupna informacija koju primaju svi agenti višeagentskog sustava je raspodijeljena kako agenti opažaju stanja koja se razlikuju prostorno, vremenski ili čak u načinu interpretacije. Zbog svega toga stanja okruženja automatski postaju djelomično mjerljiva iz perspektive svakog pojedinačnog agenta što na različite načine utječe na odlučivanje pojedinih agenata.

Dodatni problem predstavlja miješanje podataka primljenih putem senzora te se nameće pitanje kako optimalno kombinirati percepcije pojedinih agenata s ciljem postizanja, što potpunije kolektivne slike okruženja.

Još jedna razlika višeagentskog sustava s obzirom na slučaj sustava sa samo jednim agentom jest decentralizacija upravljanja. To znači da ne postoji centralni proces koji skuplja podatke od svih agenata i na temelju tih podataka odlučuje što će svaki agent raditi. Tako odlučivanje svakog agenta u najvećoj mjeri ovisi o njemu samome.

U višeagentskim sustavima svaki pojedinačni agent treba uzeti u obzir znanja koja posjeduju drugi agenti pri donošenju vlastitih odluka. Zbog toga je posebno važan koncept javnog znanja prema kojem svaki agent zna neku činjenicu, isto tako svaki agent zna da svaki drugi agent zna tu činjenicu, i tako dalje.

Komunikacija u višeagentskim sustavima podrazumijeva dvosmjerni proces gdje su svi agenti potencijalni pošiljatelji ili primatelji neke informacije. No, postavljaju se pitanja kojim se protokolima služiti kako bi razmijenjene informacije sigurno i na vrijeme stigle na odredište. Bitan je i jezik putem kojeg se agenti sporazumijevaju i razmjenjuju informacije, pogotovo ako je riječ o heterogenim agentima.

U višeagentskom sustavu gdje velik broj agenata donosi odluke u isto vrijeme, veliku nepoznicu svakom od agenata predstavlja pretpostavljanje odluka drugih agenata. Tako djelovanje jednog agenta ovisi o akcijama svih drugih agenata.

Donošenje odluke agenata u višeagentskom sustavu također je predmet već spomenute teorije igara. Teorija pokušava razumjeti i objasniti ponašanje agenata koji su u međusobnoj interakciji i suočeni su s brojnim nesigurnostima. Teorija se zasniva na dvjema pretpostavkama, a to su da su agenti racionalni i da se ponašaju strateški što znači da uzimaju u obzir moguće odluke drugih agenata pri vlastitom odlučivanju.

S obzirom na načine na koje agenti odlučuju o svojim akcijama mogu se razlučiti dvije vrste igara:

The total information received by all the agents of a multi-agent system is distributed according to how the agents perceive the states which differ spatially, temporally or even in the manner of interpretation. Therefore, the state of the environment automatically becomes incompletely measurable from the perspective of each individual agent, which in various ways influences the decision making of the individual agents.

An additional problem is represented by the mixing of data received via sensors. The question arises how to combine the perceptions of individual agents in an optimal manner with the goal of achieving the most complete possible collective perception of the environment.

One more difference between a multi-agent system and a system with only one agent is the decentralization of control. This means that there is no central process that collects data from all the agents and on the basis of these data decides what each agent will do. Such decision making by each agent primarily depends upon the agent alone.

In multi-agent systems, each individual agent should take into consideration the knowledge possessed by other agents when making its own decisions. Therefore, the concept of public knowledge is particularly important, according to which each agent knows some fact and, similarly, each agent knows that every other agent knows that fact etc.

Communication in multi-agent systems is understood to mean a two-directional process where all the agents are potential senders or receivers of some information. However, the question is posed which protocol will be used so that the exchanged information reaches its destination securely and on time. The language with which the agents communicate and exchange information is of importance, particularly concerning heterogeneous agents.

In a multi-agent system where a large number of agents make decisions at the same time, a great unknown for each agent is represented by the assumed decisions made by other agents. Such action by one agent depends upon the actions of all the other agents.

Decision making by an agent in a multi-agent system is also a subject of the previously mentioned game theory. The theory attempts to understand and explain the behavior of agents who are confronted with numerous uncertainties in mutual interaction. The theory is founded upon two assumptions, that the agents are rational and that they behave strategically, which means that they take possible decisions by other agents into account when making their own decisions.

Regarding the ways in which agents decide on their actions, two types of games can be differentiated:



U **strateškim igrama** svaki se agent odlučuje za svoju strategiju na početku igre i potom svi agenti poduzimaju akcije simultano. Ako je pak riječ o **ekstenzivnim igrama** agenti su u mogućnosti ponovno razmisliti o svojim planovima tijekom same igre. Bitno je također kakve su spoznaje pojedinog agenta o aspektima koji uključuju druge agente. Takve spoznaje mogu biti savršene ili nesavršene.

Agenti se odlučuju za pojedine akcije koje formiraju jednu zajedničku akciju na temelju koje svaki agent biva obaviješten o svojoj uspješnosti (ishodu). Ta zajednička akcija se naziva ishodom igre. Iako su funkcije uspješnosti agenata javno poznate, svaki agent nije upoznat s odabirom akcija ostalih agenata. Najviše što može učiniti je pokušati predvidjeti te akcije. Najbolje rješenje za igru je predviđanje ishoda igre temeljeno na pretpostavci da su svi agenti racionalni i razmišljaju strateški.

## 7 SIMULATORI TRŽIŠTA

Ekonomisti već jako dugo proučavaju strukturu, učinkovitost i razvoj tržišta općenito. Tradicionalni pristupi koriste se matematičkim modelima kao što je teorija igara kako bi odredili ravnotežno stanje dinamičkih ekonomskih sustava. Pri tome se koriste različite vrste simulatora. No, ovakvi pristupi nisu u mogućnosti analizirati mikro interakcije među sudionicima tržišta pogotovo u novonastalim uvjetima kada se mijenja i pristup planiranju EES-a.

Simulatori tržišta, na temelju velikog broja podataka o elektroenergetskom sustavu, troškovima proizvodnje, prijenosnim ograničenjima, tržišnom modelu, stupnju koncentracije i drugim karakteristikama predviđaju stanje na tržištu u određenom vremenskom razdoblju. Ipak simulator nije alat koji je sposoban u potpunosti zamijeniti planera i ne može bez čovjekove intervencije proizvesti tržišnu strategiju. Simulacijom se prvenstveno predviđa ravnotežna cijena na tržištu, no korištenjem prikladnog simulatora mogu se razmatrati i složenija pitanja, primjerice utjecaj restrukturiranja ili širenja tržišta, strateški ciljevi u srednjem i dužem vremenskom razdoblju, ulaz novih proizvodnih kapaciteta na tržište, ograničenja u resursima, problemi vezani uz pouzdanost proizvodnih i prijenosnih kapaciteta, utjecaj bilateralnih ugovora na tržište i slično. Takvi postupci zahtijevaju intenzivnu interakciju čovjeka-planera i simulatora.

Većina simulatora tržišta u osnovi primjenjuje neki od scenarijskih modela u simulaciji tržišta i klasične ekonomske teorije ravnoteže. Pristupi

In **strategic games**, each agent decides upon its strategy at the beginning of the game and then all the agents undertake actions simultaneously. In the case of **extensive games**, agents are able to rethink their plans during the game itself. The kind of knowledge of an individual agent regarding aspects that include other agents is also important. Such knowledge can be perfect or imperfect.

Agents decide on individual actions that form a cooperative action, on the basis of which each agent is informed of its success (result). This cooperative action is called the game result. Although the functions of the success of the agents are publicly known, each agent is not acquainted with the choices of the actions of the other agents. The most it can do is to attempt to predict these actions. The best game solution is to predict the game result based upon the assumption that all the agents are rational and think strategically.

## 7 MARKET SIMULATORS

Economists have long studied market structure, efficiency and development in general. Traditional approaches use mathematical models such as game theory in order to determine the equilibrium of the dynamics of economic systems. Various types of simulators are used. Nonetheless, such approaches cannot be used to analyze micro interactions among market participants, particularly under the new circumstances when the approach to the planning of power systems is changing.

Market simulators, based upon extensive data on the power system, production costs, transmission limitations, market model, degree of concentration and other characteristics predict the state of the market at a defined time period. Nevertheless, a simulator is not a tool that can replace a planner completely. Without human intervention, it cannot implement market strategy. Simulation primarily permits the prediction of the price equilibrium on the market. However, by using a suitable simulator it is also possible to address more complex questions, such as the influence of market restructuring or expansion, strategic goals in a medium-range and long-range time period, the entry of new production facilities on the market, limitations in resources, problems in connection with the reliability of the capacities of generation and transmission facilities, the impact of bilateral contracts on the market etc. Such approaches require intensive interaction between the human planner and the simulator.

The majority of market simulators basically apply some of the scenario models in the simulation of mar-

su pritom različiti, no prevladava probabilistički model i Monte Carlo simulacija. Takvi ekonomski modeli ipak nisu sposobni stvoriti uvid u strateško ponašanje tržišnih sudionika. Iako jedinstveno po prirodi dobara kojim se trguje, tržište električne energije tu ne odskaače od ostalih tržišta. Konvencionalne metode imaju ograničene sposobnosti uvida u strateško ponašanje tvrtki i imaju tendenciju prevelikog pojednostavlivanja prilika na tržištu i tehničkih karakteristika elektroenergetskog sustava.

Među najuspješnijim simulacijskim metodama danas je korištenje programskih agenata. U simulaciji zasnovanoj na agentima elementi stvarnog tržišta modeliraju se agentima. Dvije su osnovne značajke ovakvih modela – s jedne strane agenti se ponašaju autonomno i pokušavaju ostvariti cilj, a s druge strane agenti mogu međusobno komunicirati. Svaki agent pritom ima vlastite, specifične, strateške i operativne ciljeve.

Kako bi višeagentski simulacijski sustav prikladan za ekonomsko modeliranje bio uspješan, mora podržavati sljedeće [10]:

- komunikaciju među agentima, na način da agenti zadrže svoju autonomiju, informacije mogu biti dostupne samo ciljanim skupinama agenata, u skladu s tržišnim pravilima,
- upravljanje konfiguracijom i izvođenjem agenata,
- praćenje aktivnosti agenta,
- upravljanje modelom i konzistentnost podataka,
- podršku za različite vremenske korake u simulacijama,
- zajedničke servise za agente (pojedini aspekti simuliranog svijeta pojavljuju se u više agenata istodobno i na neki su način dijeljeni, pa zato mogu biti dostupni kao usluge sustava. Ovo nije nužan uvjet, no doprinosi softverskoj učinkovitosti ovakvih modela).

Kod primjene na simulaciju tržišta električne energije redovito se koriste okruženja za razvoj višeagentskih sustava, ali agenti i njihova unutrašnja arhitektura razvijaju se posebno za tu primjenu. Posebno su zanimljivi adaptivni agenti.

Adaptivni agenti sposobni su za inovaciju, razvoj uzoraka ponašanja koji nisu unaprijed programirani, nasuprot učenju samo na iskustvenoj bazi gdje se isključivo na osnovi doživljenih iskustava odabire postupak koji daje optimalan rezultat. Adaptivni agenti svojim postupcima mogu utjecati na okolinu, i time praktički provoditi eksperimente i zaključivati iz njih. S obzirom na prilično zahtjevne zadane uloge modeliranja ljudskog ponašanja,

kets and the classical theory of economic equilibrium. The approaches differ but the probability model and Monte Carlo simulation predominate. Such economic models are nevertheless incapable of providing insight into the strategic behavior of market participants. Although unique in terms of the nature of the goods that are traded, electrical energy markets do not differ from other markets in this respect. Conventional methods have limited capabilities of insight into the strategic behavior of companies and have a tendency to oversimplify the conditions on the market and the technical characteristics of a power system.

Among the most successful simulation methods used today are program agents. In agent-based simulation, elements of the real market are modeled with agents. There are two fundamental characteristics of such models: from the one side, the agents act autonomously and attempt to achieve the goal and from the other side, the agents can communicate among themselves. Each agent has its own specific, strategic and operative goals.

In order for a multi-agent simulation system suitable for economic modeling to be successful, it must support the following [10]:

- communication among the agents, in such a manner that the agents retain their autonomy; information is only available to target groups of agents, according to market rules,
- configuration control and agent performance,
- monitoring agent actions,
- model control and data consistency,
- support for various time steps in simulations,
- ancillary services for agents (individual aspects of the simulated world occur in several agents simultaneously and are distributed in some manner, and therefore can be available as system services. This is not an essential condition but contributes to the software performance of such models).

In an application for the simulation of electrical energy markets, environments for the development of multi-agent systems are regularly used but the agents and their internal architecture are developed especially for this application. Adaptive agents are particularly interesting.

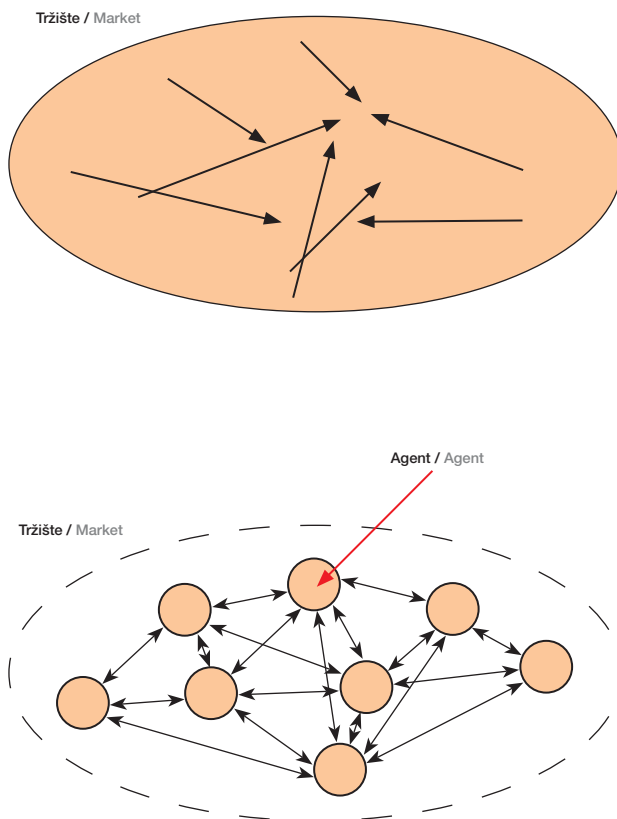
Adaptive agents are capable of innovation, the development of behavior models that are not programmed in advance, as opposed to learning solely on the basis of experience where an approach is chosen exclusively based upon experiences that provide an optimal result. Adaptive agents can influence the environment with their behavior and thereby practically conduct experiments and draw conclusions from them. Taking into account the fairly demanding given roles for the modeling of hu-

očito je da agenti uključuju algoritamske tehnike poznate iz strojnog učenja, robotike i pretraživanja informacija.

Kako se jasnije vidi sa slika 8 i 9, bitna je razlika između klasičnih simulatorskih modela i simulacijskih modela temeljenih na višeagentskim sustavima u njihovom pogledu na tržište, odnosno u njihovom shvaćanju pojma tržišta.

man behavior, it is evident that the agents include algorithm techniques known from machine learning, robotics and information searches.

As seen more clearly from Figures 8 and 9, there is a significant difference between classical simulator models and simulator models based upon multi-agent systems in their view of the markets, i.e. in their understanding of the concept of a market.



**Slika 8**  
Tržište električne energije iz perspektive klasičnih simulatorskih sustava baziranih na matematičkim modelima tržišta  
**Figure 8**  
Electrical energy market from the perspective of classical simulator systems based on mathematical market models

**Slika 9**  
Tržište električne energije iz perspektive višeagentskog sustava  
**Figure 9**  
Electrical energy market from the perspective of a multi-agent system

Klasični simulatorski modeli zasnovani na matematičkom modelu promatraju tržište kao cjelinu unutar koje se svi procesi odvijaju po nekom određenom zakonu. No, korištenje višeagentskih sustava omogućilo je usmjeravanje pažnje i fokusiranje na same sudionike tržišta. Tako je svaki sudionik predstavljen jednim agentom, a interakcijom među agentima posredno se simuliraju tržišne aktivnosti (kao u stvarnom životu).

Classical simulator models based on a mathematical model perceive the market as a whole, within which all the processes take place according to a determined law. However, the use of multi-agent systems makes it possible to focus attention on the market participants themselves. Thus, each participant is represented by an agent and the interaction among the agents indirectly simulates market activities (as in real life).

## 8 PRIMJENA VIŠEAGENTSКИH SUSTAVA ZA POTREBE SIMULIRANJA TRŽIŠTA ELEKTRIČNE ENERGIJE

Zbog trenutačno intenzivnih procesa liberalizacije i deregulacije, sasvim je neizvjesna buduća poslovna struktura industrije električne energije i tržišta električnom energijom. Stoga se na brojne načine pokušava što točnije predvidjeti buduće stanje na elektroenergetskom sektoru kako bi bilo moguće na vrijeme donijeti neke važne strateške odluke.

Trenutačna predviđanja mogućih novih poslovnih struktura uglavnom se zasnivaju na predviđanju određenih budućih scenarija. Proučavanje takvih scenarija, odnosno različitih ustrojstava tržišta električne energije, pruža zauzvrat mogućnost utvrđivanja ispravnih strateških kapitalnih investicija u određena tržišne sektore.

Velika mana ovakvog pristupa kojim se proučavaju različiti scenariji pri donošenju optimalnih odluka jeste potpuna ovisnost o stvarnoj vjerojatnosti pojavljivanja baš tog određenog promatranog scenarija ili neke promatrane familije pretpostavljenih scenarija.

Dakle, donošenje ispravnih strateških odluka temelji se na točnosti predviđanja budućih poslovnih struktura na kojima će se zasnivati model tržišta električne energije. Upravo zbog takvog načina donošenja odluka ovaj se pristup može nazvati pristupom od gore prema dolje (engl. *top-down approach*).

Za razliku od pristupa od gore prema dolje, postoji i razvija se alternativni pristup od dolje prema gore (engl. *bottom-up approach*). Ovakav pristup proučavanja tržišnih strategija nije utemeljen na predviđanjima raznih scenarija. Naprotiv, glavni temelji bottom-up pristupa su fizikalni zakoni koji vrijede za tok električne energije te cijena i dostupnost raznih mogućih tehnoloških ili ekonomskih rješenja.

Upravo u ovakvom načinu određivanja ispravnih strateških poteza veliku pomoć predstavljaju agenti i višeagentski sustavi. Naime, autonomni i adaptivni agenti mogu na vrlo učinkovit način predstaviti različite sudionike tržišta električne energije, ali isto tako i načine na koje ti sudionici međusobno djeluju (kooperacija, konkurencija, nadređenost, podređenost, nezavisnost itd.).

Evolucijom agenata kroz izvršavanje brojnih eksperimenata u simulacijama trebale bi se pokazati moguće konfiguracije tržišta i industrije električne

## 8 THE APPLICATION OF MULTI-AGENT SYSTEMS FOR THE PURPOSES OF SIMULATING THE ELECTRICAL ENERGY MARKET

Due to the current intensive processes of liberalization and deregulation, the future business structure of the electricity industry and the electricity market is completely uncertain. Therefore, numerous varied attempts are made to forecast the future state of the electricity sector as precisely as possible in order to make some important strategic decisions in time.

The currently anticipated possible new business structures are generally based upon the forecast of certain future scenarios. Studying these scenarios, i.e. various structures of the electricity markets, makes it possible to determine correct strategic capital investments within specific market sectors.

A major shortcoming of such an approach in which various scenarios are studied in making optimal decisions is the complete dependence upon the actual probability of the occurrence of precisely that specific scenario studied or a family of proposed scenarios.

Therefore, making correct strategic decisions is based upon the precision of the predicted future business structures upon which the model of the electricity market will be established. Due to this manner of decision making, this approach can be called the top-down approach.

Unlike the top-down approach, an alternative approach exists and is being developed, the bottom-up approach. Such an approach to studying market strategies is not based upon various predicted scenarios. On the contrary, the main foundations of the bottom-up approach are physical laws that apply electrical energy flow as well as the cost and availability of various possible technological or economic solutions.

It is precisely in such a manner for determining the correct strategic moves that great assistance is provided by agents and multi-agent systems. Autonomous and adaptive agents can provide highly effective representation for various participants in the electricity market and can also represent the ways in which these participants act together (cooperation, competition, dominance, subordination, independence etc.).

Through the evolution of agents by conducting numerous experiments in simulations, it should be feasible to demonstrate the possible configurations of the electricity market and industry, depending

energije i to u ovisnosti o stupnju kooperacije, kompetitivnosti i regulacije.

Osnovni cilj razvoja ovakvog pristupa i modela jest pomoći pojedinačnim tržišnim sudionicima pri odlučivanju o uvođenju novih poslovnih strategija, a koje se tiču internih reorganizacija samih sudionika kao i njihova mogućeg ulaska u nova partnerstva ili mogućeg prodora u neke nove dijelove tržišta. Isto tako je moguće kroz računalne simulacije ovog modela dobiti uvid u razvoj i evoluciju energetskega sektora kao cjeline.

### 8.1 Uloge agenata

Agenti dakle trebaju igrati uloge stvarnih tržišnih sudionika pa tako svaki od njih mora imati posebne specifikacije i vlastite ciljeve. Što je preciznije definirana zadaća i metode razmišljanja pojedinog agenta, on je bliži stvarnom sudioniku, ali zato i mnogo kompleksniji. Za potrebe simulacije tržišta električne energije u potpuno liberaliziranim uvjetima sasvim sigurno su potrebni sljedeći agenti [11]:

- ekonomski agent (fiktivni agent),
- agent proizvođač,
- agent potrošač,
- agent za informacije iz okruženja (fiktivni agent),
- agent trgovac,
- agent opskrbljivač,
- agent regulator,
- agent operator tržišta.

#### 8.1.1. Ekonomski agent

Ekonomski agent prevodi različite podatke, poput ekonomskih faktora, godišnjeg doba, vremenskih uvjeta u varijable energetske potražnje. Te se vrijednosti potražnje potom šalju agentu za informacije iz okruženja.

#### 8.1.2 Agent proizvođač

Agenti koji predstavljaju proizvođače električne energije brinu se za proizvodnju dovoljne količine električne energije za potrebe krajnjih potrošača. No, primarni cilj ovakvih agenata je ostvarivanje što većeg profita (tržišno su orijentirani). Ovisno o kojoj vrsti proizvođača je riječ, (nuklearna, hidro, termo ili neka druga elektrana), tj. ovisno o marginalnim troškovima proizvodnje i samim uvjetima vezanim uz proizvodnju električne energije, agenti proizvođači pokušavaju na optimalan način plasirati svoju proizvodnju na tržište. Pri tome svaki agent mora dobro predvidjeti poteze drugog agenta proizvođača. Ovim načinom je ostvarena konkurencija i kompetitivnost u proizvodnom sektoru.

upon the degree of cooperation, competition and regulation.

The basic goal of the development of such an approach and model is to help individual market players decide on the introduction of new business strategies, regarding internal reorganization of the participants themselves as well as their eventual entry into new partnerships or penetration into some new parts of the market. Similarly, through the computer simulation of this model, it is possible to obtain insight into the development and evolution of the energy sector as a whole.

### 8.1 The roles of agents

Thus, agents must play the roles of actual market participants and each of them must have particular specifications and its own goals. The more precisely defined the task and methods of thinking of an individual agent, the closer the agent is to an actual participant but also much more complex. For the purposes of simulating the electrical energy market under completely liberalized conditions, the following agents are certainly necessary [11]:

- economy agent (fictive agent),
- generator agent,
- consumer agent,
- information environment agent (fictive agent),
- retailer agent,
- delivery agent,
- regulator agent,
- market operator agent.

#### 8.1.1. Economy agent

The economy agent translates various data, such as economic factors, season of the year and weather conditions into energy demand variables. These demand values are then sent to the information environment agent.

#### 8.1.2 Generator agent

Agents that represent generators (producers) of electrical energy are concerned that sufficient energy is produced for the needs of the final consumers. However, the primary goal of such agents is to achieve maximum profits, since they are market oriented. Depending on the type of generator (nuclear, hydro, thermo or some other type of power plant), i.e. depending on the marginal production costs and the conditions connected with the generation of electrical energy, generator agents attempt to place their production on the market in an optimal manner. Each agent must anticipate the moves of the other generator agents well. In this manner, competition and competitiveness are achieved in the generation sector.

### 8.1.3 Agent potrošač

Agenti potrošači ne predstavljaju svakog pojedinačnog potrošača već određene grupe ili klase potrošača poput kućanstava, industrije ili privatnog sektora. Svaki agent kupuje određenu količinu energije i mijenja udio energije na tržištu ovisno o cijeni, potrebi, elastičnosti potražnje i osjetljivosti cijena. Energetska učinkovitost također se uzima u obzir.

### 8.1.4 Agent za informacije iz okruženja

Ovakav agent predstavlja neku vrstu oglasne ploče, jer sadrži sve dostupne informacije o svim sudionicima tržišta. Može se predočiti kao posrednik kojem tržišni sudionici daju informacije u vezi sa svojim trenutnim radnjama i traže informacije kako bi procijenili svoje buduće poteze. Osim komunikacijske važnosti vrši i sakupljanje podataka od tržišnih sudionika pružajući tako jasne i transparentne podatke.

### 8.1.5 Agent trgovac

Glavne unutarnje funkcije agenata trgovaca su:

- nadziranje vlastitog djelovanja u smislu profitabilnosti, kao i kretanja udjela na tržištu,
- traženje optimalne kombinacije odluka kako bi postigao bolje rezultate,
- unaprjeđenje učinkovitosti vođenja posla.

Glavni cilj ovakvog agenta jest postizanje maksimalnog profita ne ugrožavajući pri tome sigurnost opskrbe potrošača. Izrazito važna funkcija koju posjeduje agent trgovac je strateško planiranje. Kako bi to ostvarili, ovi agenti posjeduju unutarnje funkcije za simuliranje tržišta i predviđanje poteza drugih sudionika na tržištu. To je postupak simulacije unutar simulacije, te se temelji na svom znanju o ponašanju ostalih sudionika koje agent posjeduje. Kako bi predvidio buduću potrošnju, a samim time i cijenu (što je još važnije) agent ovog tipa ponekad koristi neuronske mreže. Isto tako koristi evolucijsku računsku simulaciju kako bi planirao budućnost i izveo optimalnu strategiju za širenje posla i određivanje cijena.

### 8.1.6 Agent opskrbljivač

Njihove su zadaće širenje mreže kroz područje kako bi omogućili opskrbu novih potrošača, na zahtjev agenata trgovaca. Širenje mreže vrši se pomoću funkcija kojima se optimizira put i profit, što je također moguće u GIS platformama. Agent ovog tipa ima vlastitu logiku i poput agenta trgovca, teži k maksimizaciji profita (sigurnost opskrbe potrošača električne energije nije pri tome upitna). Svojim akcijama agenti opskrbljivači potiču

### 8.1.3 Consumer agent

Consumer agents do not represent each individual consumer but rather groups or classes of consumers such as residential, commercial or the private sector. Each agent purchases a specific quantity of energy, which changes the market share of energy according to prices, requirements, elasticity of demand and price sensitivity. Energy efficiency is also taken into account.

### 8.1.4 Information environment agent

This agent represents a type of bulletin board because it contains all the available information on all the market participants. It can be seen as an intermediary via which the market participants provide information in connection with their current actions and request information in order for them to evaluate their future moves. In addition to communication importance, it also compiles data from market participants and thus provides clear and transparent information.

### 8.1.5 Retailer agent

The chief internal functions of a retailer agent are as follows:

- monitoring its own performance in the sense of profitability, as well as market share movement,
- finding optimal decision combinations in order to improve performance,
- improving management efficiency.

The main goal of such an agent is to achieve maximum profit without endangering the reliability of the consumer supply. A particularly important function of the retailer agent is strategic planning. In order to achieve this, these agents possess an internal function for market simulation and predicting the moves of other market participants. This is a simulation inside the simulation process, based upon the agent's knowledge of the behavior of the other participants. In order to predict future consumption, and thereby the price (which is more important), this type of agent sometimes uses neural networks. Similarly, the agent also uses evolutionary computer simulation in order to plan the future and derive an optimal strategy for the expansion of business and determination of prices.

### 8.1.6 Delivery agent

The task of a delivery agent is to extend the networks over the territory in order to facilitate supply to new consumers, at the request of retail agents. Expansion of the network is performed using functions that optimize paths and profits, which is also possible in GIS platforms. An agent of this type has a logic of its own and like a retailer agent seeks to maximize profits (the reliability of the supply to electricity consum-

natjecateljsko ponašanje na tržištu budući da omogućavaju širok izbor različitih ponuda krajnjim potrošačima za čiju se naklonost bore.

#### 8.1.7 Agent regulator

Agent regulator postavlja različita ograničenja za vrijeme odvijanja simulacije poput ograničavanja vremena između uzastopnog mijenjanja cijena energije ili postavljanja vršne cijene za energiju čime štiti krajnje potrošače od neopravdano visokih cijena.

#### 8.1.8 Agent operator tržišta

Agent operator tržišta određuje cijene na tržištu, ovisno o kojoj je organizaciji tržišta riječ (tržište za dan unaprijed, spot tržište i dr.). On zapravo preuzima ulogu burze električne energije jer pokušava predvidjeti potrošnju, traži ponude i ima mogućnost prihvatiti te ponude.

### 8.2 Osnovni i sintetski agenti

Ovisno o području djelovanja mogu se razlikovati dvije vrste agenata potrebne za opis elektroenergetskog sektora a to su [12]:

- osnovni agenti,
- sintetski agenti.

Osnovni agenti su elementarni agenti opisani skupom statičkih i dinamičkih parametara kao i s nekim posebnim sposobnostima vezanim uz proračune, komunikaciju i razumijevanje na temelju svog znanja.

Sintetski agent je agent nastao kombinacijom nekih osnovnih agenata koji djeluju pod njegovom kontrolom i to prema specificiranim strategijama.

Skup osnovnih agenata uključuje:

- potrošača, *C*,
- proizvođača, *G*,
- operatora prijenosnog sustava, *O*,
- operatora distribucijskog sustava, *D*,
- operatora tržišta, *M*,
- veletrgovca električne energije, *W*,
- trgovca, *R*,
- regulatorno tijelo, *T*.

Kako bi se mogle opisati i uzeti u obzir situacije kada jedan te isti tržišni sudionik ima više funkcija (npr. ako je jedan tržišni subjekt istodobno i operator distribucijskog sustava i trgovac električnom energijom) koriste se sintetski agenti. Sintetski agenti se sastoje od osnovnih agenata i koordiniraju akcijama svojih komponenti koje su usmjerene

ers is not in question). The action of these agents stimulates competitive behavior on the market since it makes a wide choice of various offers available to the final customers, for whose favor they compete.

#### 8.1.7 Regulatory agent

The regulatory agent imposes various restrictions during the simulation such as restrictions on the duration between successive movements in energy prices or imposing price-caps for energy, thereby protecting the final consumers from unjustifiably high prices.

#### 8.1.8 Market operator agent

The market operator agent determines the prices on the market, depending on the type of market organization (day-ahead market, spot market etc.). It actually assumes the role of a wholesale electricity market because it attempts to predict consumption, find offers and has the capability of accepting these offers.

### 8.2 Basic and synthetic agents

Depending on the area of action, it is possible to distinguish two types of agents needed for the description of the energy sector, as follows [12]:

- basic agents,
- synthetic agents.

Basic agents are elementary agents described by a set of static and dynamic parameters, with some special abilities connected with computation, communication and reasoning on the basis of their knowledge.

A synthetic agent is formed from a combination of several basic agents that act under its control according to specified strategies.

The set of basic agents includes the following:

- consumer, *C*,
- generator, *G*,
- transmission system operator, *O*,
- distribution system operator, *D*,
- market operator, *M*,
- trader/broker or wholesaler, *W*,
- retailer, *R*,
- regulatory body, *T*.

In order to be able to describe and take into consideration a situation when one of these market subjects has several functions (e.g., if one market subject is simultaneously the distribution system operator and the electricity retailer), synthetic agents are used. Synthetic agents consist of basic agents and coordinate the actions of all their com-

k nekom specifičnom cilju, a odvijaju se u skladu s nekom strategijom. Ipak interni, osnovni agenti ostaju samostalni u pogledu vlastitih posebnosti i sposobnosti.

Sintetski agenti samo vrše interakciju sa svojim sastavnim osnovnim agentima ili s drugim kombiniranim agentima, ali ne i sa svim drugim osnovnim agentima. Ukoliko se udružuje više agenata iste klase nastaje posebna vrsta sintetskog agenta koja se predočava kao jedan član.

Postoji, dakle, skup od osam osnovnih agenata:

$$A^b = \{C, O, D, M, W, R, T\}. \quad (8)$$

Uzimajući u obzir da je uloga regulatora isključiva, tj. da jedan agent može predstavljati regulatorno tijelo i ništa drugo, preostaje sedam ostalih osnovnih agenata pomoću kojih se mogu tvoriti sintetski agenti. Taj skup je sljedeći:

$$A^{bs} = \{C, G, O, D, M, W, R\}. \quad (9)$$

Tako je ukupan broj različitih sintetskih agenata jednak:

$$2^{|A^{bs}|} - 1 - |A^b| = 2^7 - 8 = 120. \quad (10)$$

Takvi sintetski agenti su sintetski agenti prvog stupnja. Međusobnom sintezom sintetskih agenata prvog stupnja nastaju sintetski agenti drugog stupnja. Hibridni sintetski agenti nastaju sintezom sintetskih agenata prvog i drugog stupnja.

Tradicionalno, struktura EES-a bila je vertikalno integrirana tako da su se svi procesi od proizvodnje, prijenosa i distribucije električne energije odvijali unutar iste kompanije. Mana ovakvog sustava je mogućnost prebacivanja čitavog rizika (npr. rizik od preinvestiranosti u kapacitete EES-a) na potrošače.

Na slici 10 nalazi se osnovni model EES-a koji se sastoji od agenata i njihove međusobne interakcije prikazane njihovim shemama i komunikacijom.

ponents that are oriented toward a specified goal and according to specific strategies. Nonetheless, internal basic agents remain independent in respect to their own attributes and abilities.

Synthetic agents only interact with their component basic agents or other synthetic agents but not with all other basic agents. If several agents of the same class become associated, a special type of synthetic agent occurs that is represented by a singleton.

Therefore, the set of eight basic agents is as follows:

Taking into account that the role of the regulator is exclusive, i.e. that an agent can represent a regulatory body and nothing else, seven basic agents remain, with which it is possible to create synthetic agents. This set is as follows:

Thus, the total number of various synthetic agents equals the following:

Such combined agents are degree 1 synthetic agents. Through mutual synthesis of degree 1 synthetic agents, degree 2 agents are formed. Hybrid synthetic agents are formed through the synthesis of degree 1 and degree 2 synthetic agents.

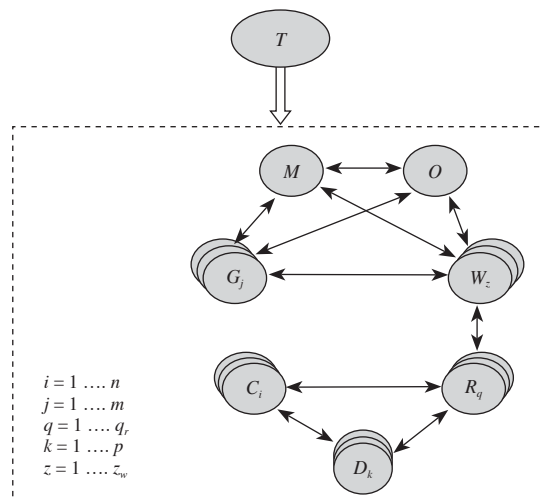
Traditionally, the power system structure was vertically integrated so that all the processes of the generation, transmission and distribution of electricity occurred within the same company. A shortcoming of this system is the possibility of passing on the entire risk (e.g., the risk of overinvestment in power system capacities) to the consumers.

Figure 10 is a basic model of an power system that consists of agents and their mutual interactions, represented by their schemes and communication.



Osnovni model postavlja okvire za izgradnju specifičnih modela elektroenergetskog sustava. Tržišni model je podmodel elektroenergetskog modela i odnosi se na transakcije vezane uz električnu energiju kao i na komercijalne aktivnosti na tržištu. Model uključuje agente i njihovu međusobnu interakciju. Glavni elementi tržišta su sudionici tržišta, teritorij, tržišna pravila, transakcije, proizvodi/usluge te fizičko ili virtualno okruženje.

The basic model establishes frameworks for the construction of specific energy system models. The market model is a sub-model of the electricity model and refers to transactions in connection with electricity such as commercial activities on the market. The model includes agents and their mutual interaction. The main market elements are market participants, territory, market rules, transactions, products/services, and physical or virtual environment.



**Slika 10**  
Osnovni model EES-a prikazan agentima i njihovom međusobnom interakcijom  
**Figure 10**  
Basic model of a power system presented via agents and their mutual interaction

U okviru modela, operator sustava, operator tržišta, proizvođači i veletrgovci međusobno vrše interakciju kao osnovni agenti na razini trgovine električnom energijom na veliko (od srednjeg k višem naponu). Istodobno su operatori distribucijskih sustava, trgovci i potrošači u sličnoj interakciji, ali na razinama napona od nižeg prema srednjem. Trgovci kupuju električnu energiju od veletrgovaca, a krajnji potrošači kupuju pak energiju od trgovaca.

Within the framework of the model, the system operator, market operator, generators and wholesalers engage in mutual interactions as basic agents on the wholesale level of electricity commerce (medium to high voltage). At the same time, the distribution system operators, retailers and consumers are engaged in similar interaction but at the level of low to medium voltage. The retailers purchase electricity from the wholesalers, and the final consumers purchase energy from the retailers.

Sintetski agent se stvara recimo u trenutku kada krajnji potrošač želi kupiti električnu energiju na tržištu, tj. od veletrgovca i riječ je o {C,R} sintetskom agentu (potrošač i trgovac).

A synthetic agent is created, let us say, at the moment when the final consumer wants to buy electricity on the market, i.e. directly from the wholesaler, a {C,R} synthetic agent (consumer and retailer).

Moguća je i situacija da potrošač (ukoliko mu je dovoljno velika potrošnja) kupuje električnu energiju direktno od proizvođača. Tada je riječ o {C,R,W} sintetskom agentu. Na analogan način se modeliraju svi drugi multi-funkcionalni agenti unutar zadane arhitekture.

A possible situation is that the consumer (if the consumer has sufficiently high consumption) purchases electricity directly from the generator. This is a {C,R,W} synthetic agent. All the other multi-functional agents within a given architecture are modeled in an analogous manner.

## 9 TRENUTAČNO DOSTUPNI ALATI

Budući da proučavanje agenata spada u relativno mladu znanstvenu disciplinu, na tržištu nije prisutan velik broj agentski zasnovanih aplikacija kojima bi se moglo simulirati tržište električne energije. Ali to područje je interesna zona brojnih istraživanja i učinjeni su značajni pomaci. Cilj ovakvih alata jest opremiti sudionike tržišta moćnim pomoćnim sredstvom pri donošenju važnih, strateških odluka.

Između svih simulatora tržišta električne energije zasnovanih na višeagentskom sustavu, daleko je najnapredniji i najrazvijeniji EMCAS.

### 9.1 EMCAS simulacijski model

Za razliku od konvencionalnih metoda i alata za analizu elektroenergetskog sektora, EMCAS (engl. *Electricity Market Complex Adaptive System*) sustav ne zasniva se na modelu unutar kojeg samo jedan subjekt donosi odluke i u kojem postoje jedinstveni ciljevi za čitav sustav. Naprotiv, agenti, koje ovaj sustav podržava, imaju svoje vlastite ciljeve i vlastite načine donošenja odluka (decentralizirano razmišljanje) [13]. Koristi se dakle modeliranje i simulacija na razini agenta (sudionika) (ABMS, *Agent Based Modeling and Simulation*).

EMCAS je razvijen od strane CEEESA (engl. *Argonne's Center for Energy, Environmental and Economic, & Systems Analysis*) [14]. Unutar složenog adaptivnog sustava (CAS, *Complex Adaptive System*), simuliraju se agenti koji uče na temelju njihovih prošlih iskustava (znanje) i sposobni su promijeniti vlastito ponašanje ovisno o novonastalim prilikama (inteligencija).

Tako agenti mogu stalno prilagođavati svoje strategije ovisno o uspjehu prošlih napora i pokušaja. Inteligencija, odnosno sposobnost učenja dostupna je svakom agentu putem metode genetskih algoritama (engl. *Genetic Algorithms*, GA). Svi agenti imaju vlastite skupove zadataka, načine donošenja odluka i obilježja ponašanja. U samom procesu odlučivanja agenti se mogu osloniti na niz prošlih informacija (prošle cijene električne energije npr.) ali i na neke predviđene podatke (potrošnja za dan unaprijed npr.) (slika 11).

## 9 CURRENTLY AVAILABLE TOOLS

Since the study of agents belongs to a relatively young scientific discipline, there are not many agent-based applications on the market that can be used to simulate electricity markets. However, this area is an interesting zone for numerous investigations and significant strides have been made. The goal of these tools is to equip market participants with powerful means to help them make important strategic decisions.

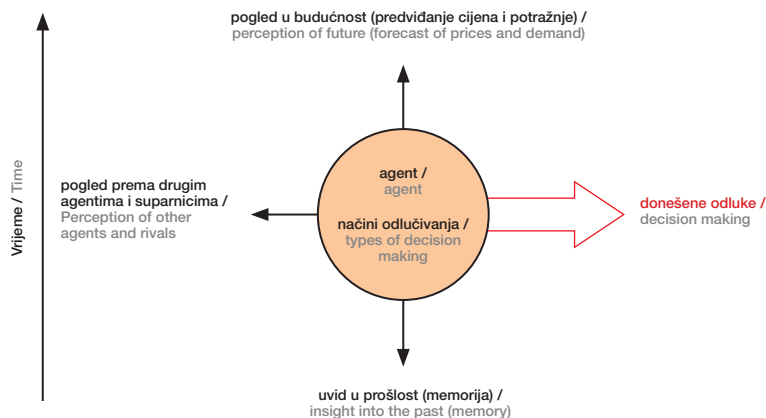
Among all the electricity market simulators based upon the multi-agent system, the most advanced and developed is the EMCAS.

### 9.1 EMCAS simulation model

Unlike conventional methods and tools for analyzing the electricity sector, the Electricity Market Complex Adaptive System (EMCAS) is not based upon a model in which only one subject makes decisions and in which there is a single goal for the entire system. On the contrary, the agents that this system supports have their own goals and their own ways of making decisions (decentralized decision structures) [13]. Agent-Based Modeling and Simulation (ABMS) are used.

EMCAS was developed by Argonne's Center for Energy, Environmental and Economic Systems Analysis (CEEESA) [14]. Within the Complex Adaptive System (CAS), agents are simulated that learn on the basis of their past experience (knowledge) and are capable of altering their own behavior, depending upon new situations (intelligence).

Thus, agents can constantly adapt their strategies, depending on the success of past efforts and attempts. Intelligence, i.e. the ability to learn, is available to every agent via the method of Genetic Algorithms (GA). All agents have their own sets of tasks, manner of decision making and characteristic behavior. In the decision making process, agents can rely on a series of past data (e.g., past electricity prices) but also on some predicted data, e.g., next-day consumption (Figure 11).



**Slika 11**  
Način donošenja odluka agenta u EMCAS sustavu  
**Figure 11**  
Decision making by an agent in the EMCAS

S ovakvim pristupom orijentiranim na agente, EMCAS je posebno dizajniran za simulaciju višeaentskih tržišta te omogućuje korištenje i analizu regulatornih struktura prije no što se krenu koristiti u stvarnom okruženju.

EMCAS provodi simulacije kroz šest slojeva odlučivanja prema vremenskim razdobljima koja idu od jednog sata do dugoročnog planiranja. Na svakom sloju planiranja agenti donose skup odluka kao npr. određivanje potrošnje (agenti koji predstavljaju potrošače), vozni red elektrana (proizvođači), bilateralni ugovori (proizvođači i opskrbljivači) i raspored rada (vozni red) elektrana (operator sustava). Agenti zatim primjenjuju vlastita pravila odlučivanja te ocjenjuju koliko dobro ta pravila ispunjavaju njihove ciljeve.

Model uključuje velik broj različitih agenata s različitim zadaćama (različitih sudionika tržišta električne energije) kako bi se što bolje prikazala i dočarala kompleksnost i heterogenost sudionika tržišta. Dostupni su agenti koji predstavljaju proizvodne tvrtke (GenCos), prijenosne tvrtke (TransCos), distribucijske tvrtke (DistCos), nezavisni operatori sustava (ISOs) ili organizatori regionalnog prijenosa (RTOs), tvrtke opskrbljivači (DemCos), potrošači i regulatori. Ovi agenti su visoko specijalizirani kako bi obavljali različite zadatke, a kako bi se omogućila takva specijalizacija agenti posjeduju detaljizirana pravila. Isto tako korisnik (analizator) može definirati nova pravila i strategije te promotriti posljedice tih novih strategija na tržišne prilike.

Svaki agent ima svoju djelatnu strategiju putem koje odlučuje o tome kada i kako djelovati te na koje načine odrediti iznos cijene. Ove strategije se mogu mijenjati, dakle nisu statične. Naprotiv,

With such an agent-oriented approach, EMCAS is especially designed for the simulation of multi-agent markets and facilitates the use and analysis of regulatory structures before they are applied in the real environment.

EMCAS performs simulation through six layers of decision making according to time periods that range from one hour to long-term planning. In every planning layer, agents make a set of decisions such as, for example, determining consumption (agents who represent consumers), power plant schedules (generators), bilateral contracts (generators and retailers) and the power plant schedule (system operator). Agents apply their own decision-making rules and assess how well these rules meet their goals.

The model includes a large number of various agents with various tasks (electricity market participants) in order to present and conjure the complexity and heterogeneity of the market participants as well as possible. Agents are available that represent generation companies (GenCos), transmission companies (TransCos), distribution companies (DistCos), independent system operators (ISOs) or regional transmission operators (RTOs), demand companies (DemCos), consumers and regulators. These agents are highly specialized in order to perform various tasks and have detailed rules in order to facilitate such specialization. Similarly the user (analyst) can define new rules and strategies and observe the consequences of these new strategies under market conditions.

Each agent has its own strategy, according to which it decides when and how to act and how to set prices. These strategies can change and are not static. On the contrary, it is desirable for agents to change

želja i jest da agenti mijenjaju svoje strategije na osnovi stečenog znanja i adaptivnih sposobnosti.

U EMCAS simulacijskom modelu, agenti uče o vlastitom tržišnom ponašanju kao i o ponašanjima i akcijama drugih agenata putem dva zasebna načina učenja:

- učenje zasnovano na promatranju,
- učenje zasnovano na istraživanju.

Pod učenjem zasnovanim na promatranju, podrazumijeva se da agenti razmatraju svoja prošla djelovanja i na osnovi uspješnosti tih djelovanja odlučuju o promjeni strategije, njenom zadržavanju ili samo nekim preinakama u strategiji. Učenje temeljeno na istraživanju omogućuje agentima da istražuju i analiziraju moguće tržišne strategije te strategije ponude. Ukoliko agent pronade zadovoljavajuću strategiju on ju počinje primjenjivati te fino podešavati ovisno o novim tržišnim prilikama.

## 9.2 Interakcijske razine EMCAS modela

Interakcijske razine predstavljaju zapravo multidimenzionalno okruženje unutar kojeg agenti obavljaju svoje djelatnosti. Agenti djeluju unutar nekoliko međusobno povezanih razina, a to su fizikalna razina, nekoliko poslovnih razina te najviša, regulatorna razina (slika 12).

their strategies on the basis of knowledge acquired and adaptive abilities.

In the EMCAS simulation model, the agents learn about their own market behavior as well as the behavior and actions of other agents in two separate types of learning:

- observation-based learning,
- exploration-based learning.

Under observation-based learning, it is understood that the agents consider their past actions and on the basis of the success of these actions decide upon changing the strategy, retaining it or only making some adjustments. Exploration-based learning allows agents to explore and analyze possible market strategies and supply strategies. If an agent finds a satisfactory strategy, it begins to apply and refine it, depending on the new market conditions.

## 9.2 Interaction layers of the EMCAS model

Interaction layers actually represent a multidimensional environment within which agents operate. Agents operate within several interconnected layers and these are the physical layer, several business layers and the highest layer, the regulatory layer (Figure 12).

**Slika 12**  
Interakcijske razine u EMCAS sustavu  
Figure 12  
Interaction layers in the EMCAS



Fizikalna razina sastoji se od agenata koji obuhvaćaju fizičku proizvodnju, prijenos, distribuciju i potrošnju električne energije. Potrošači i proizvođači međusobno povezani prijenosnim vodovima čine fizikalni dio tržišta električnom energijom. Agent koji predstavlja ISO, odnosno RTO u fizikalnoj razini odgovoran je za povezivanje proizvodnje i potrošnje te za prilagođavanje promjena u potrošnji ili proizvodnji.

Physical layers consist of agents, which include the physical generation, transmission, distribution and consumption of electrical energy. Consumers and generators interconnected by transmission lines comprise the physical part of the electricity market. An agent that represents an ISO or RTO in a physical layer is responsible for linking generation and consumption and for adjusting to changes in consumption or generation.

Na slici 12 mogu se vidjeti i tri poslovne razine koji zajedno predstavljaju poslovnu stranu tržišta. Na ovoj razini agenti proizvođači promišljaju o uporabi svojih resursa, agenti opskrbljivači kupuju električnu energiju od agenata proizvođača i prodaju je krajnjim potrošačima.

Agenti opskrbljivači mogu kupovati energiju od proizvođača bilo na burzi, kojom upravlja ISO/RTO, bilo putem bilateralnih ugovora koji se dogovaraju privatno između dva agenta. Razina prijenosnih i distribucijskih tvrtki je dizajnirana kako bi se uzelo u obzir vlasništvo nad tim sustavima kao i potraživanja ovih tvrtki za korištenje njihovih postrojenja.

Regulator je agent koji se nalazi u regulatornoj razini. On postavlja tržišna pravila i nadgleda tržišna zbivanja.

### 9.3 Mogućnosti simulacijskog modela EMCAS

Sustav je u stanju simulirati tri vrste tržišta, a tu spadaju bilateralni ugovori, burza električne energije i tržište pomoćnih usluga. U globalu bilateralni ugovori se sklapaju između jednog agenta proizvođača i jednog agenta opskrbljivača i mogu biti na bazi jednog sata ili nekoliko godina.

U slučaju trgovine električne energije na burzi, agenti prilažu svoje ponude i potražnje ISO agentu. Postoje dvije vrste formiranja cijene na burzi. U prvom načinu svim se agentima plaća jednaka cijena koja se dobiva iz ukupne potražnje i ponude električne energije. U drugom načinu agentima proizvođačima isporučena energija biva plaćena po ponuđenoj cijeni (engl. *pay as bid*).

U modelu se simuliraju tri tipa pomoćnih tržišta: regulacija, rotirajuća rezerva i dodatna rezerva.

EMCAS omogućava predviđanje cijena električne energije i to počevši od satne pa sve do vremenske razine od nekoliko godina [15]. Na taj način može se analizirati bilo kratkoročna bilo dugoročna pozicija sudionika na tržištu. Tako je EMCAS alat koji pomaže pri upravljanju rizicima i određivanju optimalne strategije tržišnog nastupa. Pri tome je posebna pažnja posvećena proizvođačima električne energije kao sudionicima koji svojim strateškim odlukama i potezima mogu ispitivati vlastitu tržišnu moć (fizičko i ekonomsko suzdržavanje).

Dodatna mogućnost EMCAS-a jest dugoročno planiranje za nekoliko godina. Decentraliziranim odlukama pojedinačni agenti na temelju svojih internih ciljeva planiraju izgradnju novih proizvodnih kapaciteta. Proizvođač električne energije na temelju svoje trenutne tržišne pozicije, sklonosti riziku i poslovnih ciljeva može ispitati i rangirati

Figure 12 shows three business layers that together represent the business side of the market. At this level, generator company agents decide upon the use of their resources and demand company agents purchase electricity from generator company agents and sell it to the final consumers.

Demand company agents can purchase energy from generators either on a market administered by an ISO/RTO or via bilateral contracts that are entered privately between two agents. The layer of the transmission and distribution companies is designed to take the ownership of these systems into account as well as the demand for the use of their facilities.

The regulator is the agent in the regulatory layer. It sets the market rules and monitors market events.

### 9.3 EMCAS Model Simulation

The system can simulate three types of markets, including bilateral contract, pool energy and ancillary services. Generally, bilateral contracts are entered between a single generator company agent and a single demand company agent, and can be based upon one hour or several years.

In the case of the pool energy market, agents submit their buy and sell bids to the ISO agent. There are two types of price formation on the pool energy market. In the first type, all the agents are paid the same price, which is obtained from the total electricity supply and demand. In the second type, generator company agents delivers energy at the price that it bids, known as *Pay-as-Bid*.

In the model, three ancillary services markets are simulated: regulation, spinning reserve and replacement reserve markets.

EMCAS facilitates the forecasting of electricity prices, ranging from hours to several years [15]. In this manner, it is possible to analyze both short-term and long-term participant positions on the market. Thus, EMCAS is a useful tool in risk management and determining optimal strategies for market performance. Particular attention is devoted to generators of electricity as participants who with their strategic decisions and moves can explore their own market power (physical and economic withholding).

An additional possibility of the EMCAS is long-term planning for several years. Through decentralized decisions, individual agents plan the construction of new production facilities based upon their internal goals. An electricity generator company can review and rank the available production options based upon its current market position, risk profile

dostupne opcije proizvodnje kojim bi eventualno proširio svoje proizvodne kapacitete.

## 10 ZAKLJUČAK

Nakon svega navedenog, može se gotovo sa sigurnošću ustvrditi da su klasični simulacijski modeli tržišta električne energije, temeljeni na matematičkim modelima, našli i više nego dostojnu zamjenu i da moraju svoje mjesto prepustiti novoj snažnoj i obećavajućoj metodi temeljenoj na višeagentskom modelu tržišta. Takvim pristupom moguće je u simulaciji predstavljati i promatrati svakog tržišnog pojedinca i za svakog od njih pronaći optimalnu tržišnu strategiju.

Kao i svaki drugi simulacijski model i ovaj zasnovan na agentima donosit će to bolje rezultate što je detaljnije i preciznije prikazano stanje realnog promatranog tržišta. Naime svako tržište ima svoje specifičnosti po kojima se razlikuje od drugih, bilo da je riječ o veličini tržišta, udjelu električne energije dobivene iz različitih izvora ili pak zakonskim regulativima. Onaj tržišni sudionik koji bude posjedovao kvalitetniji simulacijski model koji je primjereno prilagođen spomenutim specifičnostima, sasvim sigurno će biti u velikoj prednosti pred ostalom tržišnom konkurencijom.

and business goals, according to which it could eventually expand its generating capacities.

## 10 CONCLUSION

In light of that which has been presented, it can be said that classical simulation models for electricity markets, based upon mathematical models, now have a more than suitable replacement and they must relinquish their place to the new, powerful and promising methods based upon the multi-agent market model. With this approach, it is possible to present and review every individual market participant in simulation and find the optimal market strategy for each one.

As with every other simulation model, the quality of the results provided by this agent-based model will depend upon the degree of detail and precision of the presentation of the real state of the investigated market. Each market has its own specific characteristics that differentiate it from others, whether concerning the market size, percentage of electricity obtained from various sources or legal regulations. The market player in possession of a quality simulation model adapted to these specificities will certainly have an advantage over market competition.

---

## LITERATURA / REFERENCES

- [1] SAMUELSON, P. A., NORDHAUS, W.D., Economics, 15. izdanje, McGraw-Hill, Inc., hrvatski prijevod, izdavač MATE, Zagreb, 2000.
- [2] WANGESTEEN, I., Power Markets, Predavanja iz kolegija Uvod u tržište energentima, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb, 2006.
- [3] STEFANOV, P. Č., Eksploatacija elektroenergetskih sistema, (Power point prezentacija), Beograd, 2004.
- [4] FLORES-MENDEZ, R. A., Towards a Standardization of Multi-Agent System Frameworks, 1999., <http://www.acm.org>
- [5] VLASSIS, V., A Concise Introduction to Multiagent Systems and Distributed AI, University of Amsterdam, Amsterdam, 2003
- [6] BOURGNE, G., Affect-based Multi-Agent Architecture, the University of Hull, Hull, September 2003
- [7] SHEN, Z. ET AL, Goal Autonomous Agent Architecture, Nanyang Technological University, Singapore, 2004
- [8] KUŠEK, M., Agentski orijentirano programsko inženjerstvo, (Power point prezentacija), Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zavod za telekomunikacije, Zagreb, ožujak 2006.
- [9] STONE, P., VELOSO, M., Multiagent Systems: A Survey from a Machine Learning Perspective, Autonomous Robotics, vol. 8, No. 3, July 2000
- [10] KEKO, H., Inteligentni višeagentski sustavi u simulaciji tržišta električne energije, kvalifikacijski doktorski rad, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zavod za visoki napon i energetiku (ZVNE), Zagreb, 2006.
- [11] NAING WIN OO, N., MIRANDA, V., Multi-energy Retail Market Simulation with Intelligent Agents, Faculty of Engineering of the University of Porto, Portugal, 2005
- [12] GNANSOUNOU, E. et al, A multi-agent approach for planning activities in decentralized electricity markets, Knowledge – Based Systems, 2006.
- [13] GUENTER, E. et al, Multi-Agent Power Market Simulation using EMCAS, Argonne National Laboratory, Argonne, 2004
- [14] Argonne National Laboratory, Center for Energy, Environmental, and Economic Systems Analysis, <http://www.dis.anl.gov>
- [15] ANDROČEC, I., PUZAK, D., KRAJCAR, S., Modeliranje elektroenergetskog sustava bazirano na multiagentskim algoritmima, 8. savjetovanje HRO CIGRE, Cavtat, 2007.

---

Uredništvo primilo rukopis:  
2007-11-29

Manuscript received:  
2007-11-29

Prihvaćeno:  
2007-12-07

Accepted:  
2007-12-07

# PRORAČUN GODIŠNJIH GUBITAKA RADNE ENERGIJE U DISTRIBUCIJSKOJ MREŽI S PRIKLJUČENOM VJETROELEKTRANOM CALCULATION OF ANNUAL ACTIVE ENERGY LOSSES IN A DISTRIBUTION NETWORK WITH A CONNECTED WIND POWER PLANT

Dr. sc. Ranko Goić, Damir Jakus, dipl. ing., Dr. sc. Eugen Mudnić,  
Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje,  
R. Boškovića b.b, 21000 Split, Hrvatska

Priključak distribuiranih izvora energije na distribucijsku mrežu, između ostalih utjecaja, ima za posljedicu preraspodjelu tokova snaga u mreži, a time i promjenu iznosa gubitaka radne energije. U određenom trenutku, ovisno o potrošnji u mreži i snazi koju u mrežu injektira vjetroelektrana, gubici radne snage mogu biti veći ili manji u odnosu na stanje bez priključene elektrane. Međutim, trenutačna vrijednost gubitaka radne snage nije bitna, već prvenstveno ukupni gubici radne energije na godišnjoj razini. Zbog toga je u radu razrađena metodologija proračuna godišnjih gubitaka radne energije u distribucijskoj mreži u uvjetima priključenog distribuiranog izvora, pri čemu se polazi od poznatih kronoloških krivulja opterećenja i proizvodnje. Odgovarajući proračuni su izvršeni na primjeru realne distribucijske mreže i vjetroelektrane koja se planira priključiti na nju.

Connecting distributed generation to a distribution network affects the load flows in the network, resulting in the redistribution of load flows in the network and thereby changing the amount of active energy losses. At a given moment, depending upon the network consumption and the power injected from a wind power plant into the network, the active power losses can be higher or lower than they were before the wind power plant was connected. However, the aggregate annual energy losses, rather than instantaneous active power losses, are of significance. Therefore, a methodology has been developed for calculating the annual active energy losses in a distribution network in the case of a distributed generation connection, assuming the known chronological consumption and production curves. The corresponding calculations have been performed for an existing distribution network and a wind power plant scheduled to be connected to it.

**Ključne riječi:** distribuirani izvor, gubici radne energije, vjetroelektrana  
**Key words:** Distributed generation, wind power plant, active energy losses





## 1 UVOD

U proteklih 10-tak godina svjedoci smo relativno velikog rasta udjela distribuiranih izvora električne energije, tj. elektrana priključenih na distribucijsku mrežu, što je primarno rezultat:

- otvaranja tržišta električne energije, praćenog odgovarajućom zakonskom regulativom za slobodan pristup distribucijskoj mreži, što omogućava privatnim (malim) investitorima ulaganje i izgradnju manjih elektrana,
- poticajnih cijena električne energije (najčešće u obliku fiksnih i garantiranih otkupnih cijena) koje se također odgovarajućom zakonskom regulativom redovito propisuju za obnovljive izvore energije i kogeneracijsku proizvodnju,
- tehnološkog napretka, odnosno razvoja efikasnijih i jeftinijih elektrana, posebice onih manjih nazivnih snaga za koje prije, bez prethodne dvije stavke, nije postojala dovoljna motivacija za razvoj.

U zadnjih nekoliko godina, posebno je intenzivan rast novih distribuiranih izvora ostvaren u vjetroelektranama. Razlog tome je bio prvenstveno ekonomske naravi, tj. najkraće vrijeme povrata investicije u odnosu na ostale obnovljive izvore, ali i ostali faktori, kao što su zanemariv utjecaj na okoliš, kratko vrijeme izgradnje (tipski proizvod), veliki potencijalni resursi energije vjetra itd. Iako takvo stanje vrijedi i danas, tendencije razvoja vjetroagregata idu prema većim jedinicama i većim vjetroelektranama koje se u tom slučaju priključuju na prijenosnu mrežu.

Priključak elektrane na distribucijsku mrežu [1] i [2], bez obzira na snagu elektrane i naponsku razinu, odnosno mjesto priključka, dovode do značajnih promjena pogonskih značajki distribucijske mreže, koje se mogu grupirati u stacionarne i dinamičke značajke. Promatrajući samo stacionarne značajke, valja istaknuti dva osnovna aspekta:

- naponske prilike duž radialnog kraka distribucijske mreže na koju je priključen jedan ili više distribuiranih izvora,
- utjecaj na gubitke snage i energije u distribucijskoj mreži.

Oba navedena aspekta mogu imati pozitivne i negativne utjecaje, ovisno o tipu i režimu rada distribuiranog izvora s jedne strane, te režimu opterećenja i tehničkim karakteristikama distribucijske mreže s druge strane. U ovom radu ukratko su opisane teoretske osnove utjecaja distribuiranih izvora na gubitke snage i energije u distribucijskoj mreži, te mogućnosti njihova izračuna. Pri tome je od primarnog značenja što točniji izračun promje-

## 1 INTRODUCTION

During the past decade, we have witnessed a relatively high increase in the share of distributed generation, i.e. power plants connected to a distribution network, primarily due to the following:

- electricity market liberalization, accompanied by the corresponding legislative framework for open access to the distribution network, which has made it possible for private (small) investors to invest in and build small power plants,
- incentive electricity prices, most commonly in the form of fixed and guaranteed feed-in tariffs, which are also regularly stipulated by the legislation governing renewable energy sources and cogeneration,
- technological achievements, i.e. the development of more efficient and less expensive power plants, especially those with lower nominal power, for which there had been little inducement prior to the above-mentioned market liberalization and price incentives.

Recently the growth of new distributed power sources from wind power plants has been particularly intensive. The reason for this is primarily of an economic nature, i.e. the shortest period of investment return among the other renewables as well other factors, such as negligible environmental impact, short construction time (standardized product), the great potential of wind energy resources etc. Although all this still applies today, the trend in wind turbine development is toward large units and wind power plants that are connected to a transmission network.

The connection of a power plant to a distribution network [1] and [2], irrespective of the rated power, voltage level and connection point of the power plant, results in significant changes in the operating features of the distribution network, which can be classified as either stationary or transient features. Regarding the stationary features, two basic aspects should be emphasized:

- the voltage profile along the distribution network radial feeder, to which one or more distributed sources are connected,
- the impact on power and energy losses in the distribution network.

Both of these aspects can have positive or negative repercussions, depending upon the type of distributed generation and operating conditions, on the one side, and the technical characteristics of the distribution network and load conditions, on the other side. In this work, the theoretical foundations of the basic impact of distributed generation upon power and energy losses in a distribution network

ne (povećanja/smanjenja) gubitaka radne energije na godišnjoj razini nakon priključka distribuiranog izvora na distribucijsku mrežu. Također, vrlo je značajno iznalaženje prave razine kompromisa između detaljnog točnog proračuna koji zahtijeva veliku količinu ulaznih parametara i aproksimativnih izračuna koji traže manji opseg ulaznih parametara uz brži i jednostavniji proračun, ali uz nešto veću grešku u proračunu.

Primjer takvog proračuna dan je za realnu distribucijsku mrežu i vjetroelektranu koja se planira priključiti na nju, na način da je napravljen detaljni i aproksimativni izračun.

## 2 GUBICI SNAGE I ENERGIJE U DISTRIBUCIJSKOJ MREŽI

### 2.1 Općenito o gubicima snage i energije u distribucijskoj mreži

Prema načinu nastanka, gubici električne snage i energije [3] dijele se na:

- tehničke gubitke koji su direktna su posljedica stavljanja postrojenja pod napon i protjecanja električne struje kroz elemente električne mreže. Veličina ovih gubitaka ovisi o tehničkim karakteristikama elemenata električne mreže. Tehnički gubici se mogu vrlo točno ustanoviti mjerenjem ili proračunom na odgovarajućem računalnom modelu, iako obje metode mogu biti vrlo zahtjevne. Mjerenje zahtijeva instaliranje mjernih uređaja koje se uobičajeno ne koriste, tako da implicira dodatne troškove. Mjerenjem se ne mogu ustanoviti gubici radne energije u fazi planiranja priključka distribuiranog izvora, dok je nakon priključka to moguće, ali samo uz dodatne računske tehnike kojima je moguće sa zadovoljavajućom razinom točnosti ustanoviti promjenu u odnosu na stanje bez distribuiranog izvora. Međutim, općenito mjerenjem nije moguće ustanoviti tehničke gubitke u mreži, prvenstveno zbog utjecaja komercijalnih gubitaka,
- komercijalne (netehničke) gubitke koji nastaju zbog neispravnosti mjernih uređaja i neovlaštene potrošnje električne energije. Redovito ih nije moguće direktno prepoznati i alocirati, već samo izračunati kao razliku ukupno registriranih gubitaka (razlika obračunate električne energije na mjestima preuzimanja i isporuke električne energije) i izračunatih tehničkih gubitaka pomoću računalnog modela.

Tehnički gubici, s obzirom na način nastanka mogu se podijeliti na [4]:

are briefly described, as well as possibilities for their calculation. Following the connection of a distributed power plant to a distribution network, it is of primary importance to calculate the changes (increases/decreases) in energy losses on the annual level as precisely as possible. Furthermore, it is very important to find the right level of compromise between detailed and precise calculation, requiring a large number of input parameters, and approximate calculation, requiring fewer input parameters and facilitating faster and simpler calculation but with a somewhat higher margin of error.

An example is provided for an existing distribution network and wind power plant scheduled to be connected to it, for which both detailed and approximate calculations have been performed.

## 2 POWER AND ENERGY LOSSES IN DISTRIBUTION NETWORKS

### 2.1 Power and energy losses in distribution networks

Power and energy losses are classified according to the manner in which they occur [3], as follows:

- technical losses are a direct consequence of energizing electrical facilities and current flows through the electrical network elements. The majority of these losses depend upon the technical characteristics of the network elements. Technical losses can be determined very precisely by measurement or calculation using a suitable computer model, although both methods can be highly demanding. Measurement requires the installation of measuring equipment, which is generally not used and therefore implies additional costs. Measurement cannot determine active energy losses during the preparatory phase of a distributed generation connection. Measurement can be used after connection but a satisfactory level of accuracy in determining change in comparison to the situation without the distributed source requires the use of additional calculation techniques. However, it is generally not possible to determine technical losses in a network through measurement, primarily due to the influence of commercial losses,
- commercial (non-technical) losses occur due to the malfunctioning of the measuring equipment and illegal electricity consumption. They cannot be recognized and allocated by regular means but only as the difference between the total registered losses (the difference between the accounted energy at delivery points and the energy delivered to final customers) and the

- naponski ovisni gubici (tzv. gubici neovisni o opterećenju) nastaju na poprečnim elementima ekvivalentne sheme promatranog elementa električne mreže. Tipičan i najznačajniji primjer su gubici praznog hoda transformatora koji su u ekvivalentnoj shemi predloženi u poprečnom granom. Općeniti izraz za naponski ovisne gubitke snage dan je izrazom:

$$\Delta S^{\text{pop}} = \Delta P^{\text{pop}} + j\Delta Q^{\text{pop}} = 3 \cdot |V|^2 \cdot Y^* \quad (1)$$

gdje je:

- $\Delta S^{\text{pop}}$  – gubici prividne snage u poprečnoj grani elementa mreže,
- $\Delta P^{\text{pop}}$  – gubici radne snage u poprečnoj grani elementa mreže,
- $\Delta Q^{\text{pop}}$  – gubici jalove snage u poprečnoj grani elementa mreže,
- $V$  – fazni napon elementa mreže,
- $Y$  – poprečna admittancija elementa mreže.

Ukupni naponski ovisni gubici snage u promatranom dijelu distribucijske mreže dani su sumiranjem izraza (1) po svim čvorovima mreže ( $N$ ):

$$\Delta S_{\text{UK}}^{\text{pop}} = \Delta P_{\text{UK}}^{\text{pop}} + j\Delta Q_{\text{UK}}^{\text{pop}} = 3 \cdot \sum_{i=1}^N |V_i|^2 \cdot Y_i^* \quad (2)$$

- Strujno ovisni gubici (tzv. gubici ovisni o opterećenju) nastaju na uzdužnim elementima ekvivalentne sheme promatranog elementa mreže. Tipični i najznačajniji primjeri su gubici u vodičima zračnih, odnosno kabelskih vodova i namotima transformatora. U ekvivalentnoj shemi predloženi su uzdužnom granom elementa mreže. Općeniti izraz za strujno ovisne gubitke snage dan je izrazom:

$$\Delta S^{\text{uzd}} = \Delta P^{\text{uzd}} + j\Delta Q^{\text{uzd}} = 3 \cdot |I|^2 \cdot Z \quad (3)$$

technical losses calculated using a computer model.

Technical losses are classified according to the manner in which they occur [4], as follows:

- voltage-dependent losses (so-called load-independent losses) occur in parallel elements of the network under consideration. The typical and most significant examples are transformer iron losses, shown by a cross branch in equivalent schemes. The general expression for voltage-dependent losses is as follows:

where:

- $\Delta S^{\text{pop}}$  – apparent power losses in a parallel network element branch,
- $\Delta P^{\text{pop}}$  – active and reactive power losses in a parallel network element branch,
- $\Delta Q^{\text{pop}}$  – reactive power losses in a parallel network element branch,
- $V$  – phase voltage of the network elements,
- $Y$  – parallel admittance of the network elements.

The total voltage-dependent power losses in the part of the distribution network under consideration is obtained as the sum of expression (1) for all the network nodes ( $N$ ):

- Current-dependent losses (so-called load-dependent losses) occur in series elements of the network equivalent scheme considered. The typical and most significant examples are losses in the conductors of overhead and cable power lines and transformer windings. In an equivalent scheme, they are represented by a series branch of the network element. The general expression for current-dependent losses is as follows:

gdje je:

- $\Delta S^{\text{uzd}}$  – gubici prividne snage u uzdužnoj grani elementa mreže,
- $\Delta P^{\text{uzd}}$  – gubici radne snage u uzdužnoj grani elementa mreže,
- $\Delta Q^{\text{uzd}}$  – gubici jalove snage u uzdužnoj grani elementa mreže,
- $I$  – struja koja protječe kroz element mreže,
- $Z$  – uzdužna impedancija elementa mreže.

Ukupni strujno ovisni gubici snage u promatranom dijelu distribucijske mreže dani su sumiranjem izraza (3) po svim granama mreže ( $M$ ):

$$\Delta S_{\text{UK}}^{\text{uzd}} = \Delta P_{\text{UK}}^{\text{uzd}} + j \Delta Q_{\text{UK}}^{\text{uzd}} = 3 \cdot \sum_{i=1}^M |I_i|^2 \cdot Z_i \quad (4)$$

U razmatranju utjecaja distribuiranog izvora na gubitke snage u distribucijskoj mreži, poprečni gubici se mogu zanemariti, bez obzira što se naponske prilike u mreži ipak mijenjaju. Naime, naponi u mreži u realnom slučaju trebali bi biti u granicama  $\pm 5\%$ , što prema (1) znači moguće varijacije naponski ovisnih gubitaka u granicama  $\pm 10\%$ . To je daleko manje od mogućih varijacija gubitaka ovisnih o strujnom opterećenju mreže koje može varirati u rasponu 0 do 100%. Zbog toga se dalje u tekstu promatraju samo strujno ovisni gubici, pa je iz oznaka izostavljen indeks <sup>uzd</sup> koji je označavao komponentu uzdužnih gubitaka, što se dalje podrazumijeva.

Izrazi (3) i (4) mogu se izraziti i preko snage koja prolazi kroz element mreže, tj.:

$$\Delta S = \Delta P + j \Delta Q = 3 \cdot \left| \frac{S^*}{\sqrt{3}U^*} \right|^2 \cdot Z = \frac{Z}{U^2} (P^2 + Q^2) = \frac{R}{U^2} (P^2 + Q^2) + j \frac{X}{U^2} (P^2 + Q^2) \quad (5)$$

$$\Delta S_{\text{UK}} = \Delta P_{\text{UK}} + j \Delta Q_{\text{UK}} = \sum_{i=1}^M \left( \frac{Z_i}{U_i^2} \cdot (P_i^2 + Q_i^2) \right) = \sum_{i=1}^M \left( \frac{R_i}{U_i^2} \cdot (P_i^2 + Q_i^2) \right) + j \sum_{i=1}^M \left( \frac{X_i}{U_i^2} \cdot (P_i^2 + Q_i^2) \right) \quad (6)$$

gdje je:

- $P$  – radna snaga koja protječe kroz element mreže,
- $Q$  – jalova snaga koja protječe kroz element mreže,
- $R$  – radni otpor elementa mreže,
- $X$  – induktivni otpor elementa mreže,
- $U$  – linijski napon elementa mreže.

where:

- $\Delta S^{\text{uzd}}$  – apparent power losses in a series branch of the network element,
- $\Delta P^{\text{uzd}}$  – active power losses in a series branch of the network element,
- $\Delta Q^{\text{uzd}}$  – reactive power losses in a series branch of the network element,
- $I$  – network element current,
- $Z$  – network element series impedance.

The total current-dependent power losses in the part of the distribution network under consideration is obtained as the sum of expression (3) for all the network branches ( $M$ ):

Considering the impact of the distributed source on the power losses in the distribution network, voltage-dependent losses can be ignored, although the voltage conditions in the network nonetheless change. Voltages in the existing situation should be within the limits of  $\pm 5\%$ , which according to (1) signify possible voltage-dependent power loss variation within the limits of  $\pm 10\%$ . This is far less than the possible variations in loss, depending upon the network current loads that can vary within a range of 0 to 100%. Therefore, only the current-dependent losses will be considered henceforth. The superscript <sup>uzd</sup>, which indicates the parallel power loss component, will not be written in the expressions but should be assumed.

The expressions (3) and (4) can also be expressed as power through the network element, i.e.:

Tokovi radnih i jalovih snaga kroz elemente elektroenergetske mreže, te naponi svih čvorova, dobiju se standardnim proračunom tokova snaga i naponskih prilika, pod pretpostavkom da su poznati tehnički parametri mreže, topologija i uklopno stanje, te opterećenje mreže u svakom čvoru. Redovito se u programima za proračun tokova snaga implementira i proračun za automatsko izračunavanje gubitaka radne i jalove snage za svaki element mreže, te eventualno zbirno po naponskim nivoima, istovrsnim elementima mreže, distribucijskim (napojnim) područjima, izvodima itd. [5] i [6]. Zbog toga je proračun gubitaka snage u distribucijskoj mreži zapravo trivijalan zadatak, kojeg je za manju distribucijsku mrežu moguće izvesti čak i ručno. Međutim, poznavanje – izračun gubitaka snage u distribucijskoj mreži za promatrano opterećenje, općenito nije dovoljan pokazatelj, bez obzira što se može izvesti primjerice za dva krajnja karakteristična stanja maksimalnog i minimalnog opterećenja. Pravi značajni pokazatelj su gubici energije u određenom vremenskom razdoblju, primjerice u jednoj kalendarskoj godini.

Točan izračun gubitaka električne energije znatno usložnjava proračun i to najmanje iz dva (međusobno povezana) razloga:

- potrebno je poznavati karakteristiku potrošnje u svim čvorovima promatrane distribucijske mreže, tj. kronološke krivulje opterećenja linearno diskretizirane na veće ili manje vremenske podintervale (primjerice sate) ili odgovarajuće krivulje trajanja opterećenja. Prva aproksimacija, bez većih utjecaja na grešku proračuna, može se napraviti i korištenjem navedenih krivulja promatrane distribucijske mreže u cjelini, uz odgovarajuću raspodjelu potrošnje po čvorovima koja odgovara potrošnji u trenutku vršnog opterećenja ili u trenutku za koje raspolažemo izmjerenim podacima opterećenja svih čvorišta,
- s obzirom na promjenljivost potrošnje, proračun tokova snaga potrebno je napraviti za svaki promatrani vremenski podinterval ili eventualno reducirati potreban broj proračuna na način da se koristi krivulja trajanja opterećenja i njena linearizacija na veće podsegmente (u odnosu na bazni vremenski podinterval), pri čemu je onda za očekivati određenu pogrešku u rezultatu zbog takve aproksimacije.

Dakle, ukupni gubici energije u promatranom vremenskom razdoblju  $T$  mogu se dobiti iz izraza (6), sumiranjem gubitaka energije po svim vremenskim podintervalima unutar ukupno promatranog razdoblja, pod pretpostavkom konstantnog opterećenja u svakom podintervalu i istog trajanja svakog podintervala ( $\Delta t$ ):

The flows of active and reactive power through the power network elements and all the node voltages are obtained using the standard calculations of the load flow and voltage drop, assuming that the technical parameters of the network, topology, network configuration and network loads in each node are known. In power flow software, automatic active and reactive calculations of power losses are regularly performed for each network element, and eventually totaled according to voltage levels, the same types of network elements, distribution areas, feeders etc. [5] and [6]. Therefore, the calculation of the power losses in a distribution network is actually a trivial task, which can even be performed manually for a small distribution network. However, the power loss in a distribution network for a particular load is generally not a sufficient indicator, although calculation can be performed, e.g. for two characteristic states of maximum and minimum loads. The truly significant indices are energy losses during a specific time period, e.g., during one calendar year.

The precise calculation of electrical energy losses significantly complicates analysis, for at least two related reasons:

- it is necessary to know the load characteristics for all the nodes of the distribution network considered, i.e. the chronological load curves linearly discretized into larger or smaller time subintervals (e.g., hours) or corresponding load duration curves. The first approximation, without a major impact on the calculation error, can be performed by using the aforementioned curves of the considered distribution network in its entirety, with the corresponding load allocation on the nodes, which corresponds to consumption at the moment of peak load or at the moment for which we have measured load data available for all the nodes,
- due to load variability, load flow calculation should be performed for each time subinterval considered or eventually the required number of calculations should be reduced in such a manner that the load duration curve and its linearization are used on large subsegments (in relation to the basic time subinterval), although a certain degree of error should be expected in the result due to such approximations.

Therefore, total energy losses during the time period  $T$  under consideration can be obtained using expression (6), by totaling the energy losses according to all the time subintervals within the total period under consideration, assuming a constant load at each subinterval and the same duration of each subinterval ( $\Delta t$ ):

$$\Delta W_{\text{UK}} = \Delta W_{\text{UK}}^r + j\Delta W_{\text{UK}}^j = \Delta t \cdot \sum_{i=1}^M Z_i \sum_{t=1}^T \left( \frac{P_i^2(t) + Q_i^2(t)}{U_i^2(t)} \right). \quad (7)$$

U gornjem izrazu, napon se može pretpostaviti jednak nazivnom naponu bez većeg utjecaja na točnost izračuna. U slučaju proračuna gubitaka energije pomoću programa za tokove snaga, nema potrebe za takvom aproksimacijom. Ako se proračun radi temeljem aproksimirane krivulje trajanja opterećenja, vremenski podintervali  $\Delta t$  općenito ne moraju biti jednaki, tako da je u izrazu (7) faktor  $\Delta t$  potrebno uvesti u sumu.

## 2.2 Utjecaj priključka distribuiranog izvora na gubitke snage i energije u distribucijskoj mreži

U tzv. pasivnoj distribucijskoj mreži radne i jalove snage u granama  $P_i(t)$ ,  $Q_i(t)$  rezultat su isključivo potrošnje, odnosno potrošača priključenih iza (u odnosu na pojnu točku) promatrane grane mreže, te gubitaka snage u granama (koji su obično reda veličine do nekoliko postotaka). Zbog toga se na radijalnom izvodu distribucijske mreže (npr. izvodu 10 kV ili 20 kV) snage u granama smanjuju kako se kreće od pojne točke prema kraju izvoda, pa se i gubici koncentriraju na početnim granama, te opadaju prema kraju izvoda. Na slici 1 je prikazan primjer 10(20) kV-nog izvoda napajanog iz TS x/10(20) kV sa 5 čvorova (mjesto priključka TS x/0,4 kV) i 5 grana (vodova). Grafikonom su prikazani tokovi radnih i jalovih snaga duž izvoda, tj. po svim granama. Potrošnja radne i jalove snage u  $i$ -tom čvorištu označena je sa  $P_{p-i}$ , odnosno  $Q_{p-i}$ .

Ako se npr. u čvoru 4 priključi elektrana, ona će u trenutku  $t$  proizvoditi radnu snagu  $P_G(t)$  i jalovu snagu  $Q_G(t)$ , pa se takva mreža, odnosno dio mreže od pojne točke do čvora s priključenom elektranom, naziva aktivna distribucijska mreža. U slučaju da nema potrošnje na izvodu, radna i jalova snaga koju proizvede elektrana ima tijekom prema pojnoj točki  $i$  to u jednakom iznosu preko svih grana 1 do 4 (također zanemareni gubici). Superpozicijom tokova snaga u granama koje su rezultat potrošnje i tokova snaga koje su rezultat proizvodnje elektrane, dobije se situacija prikazana na slici 2. Odabran je slučaj kad je radna snaga elektrane upravo jednaka potrošnji na izvodu, dok je jalova snaga elektrane jednaka nuli, budući da je najčešći slučaj da distribuirani izvori rade s faktorom snage  $\cos \varphi = 1$ . Međutim, u nekim slučajevima radi se o asinkronim generatorima bez kompenzacije jalove snage, tako da elektrana u tom slučaju predstavlja dodatnog potrošača jalove snage, povećavajući na taj način opterećenje grana jalovom snagom.

In the above expression, the voltage can be assumed to be equal to the rated voltage, without major impact upon the precision of the calculation. In the calculation of energy losses using load flow software, there is no need for such approximation. If the calculation is based upon the approximated load duration curve, the time subintervals  $\Delta t$  generally do not have to be equal, so that in expression (7), factor  $\Delta t$  must be entered into the sum.

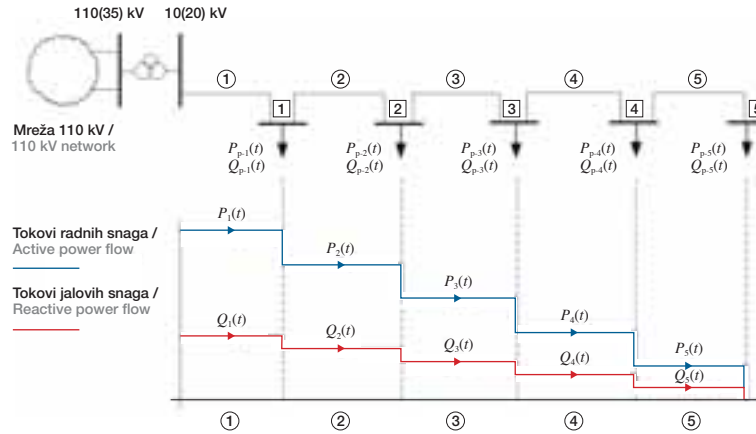
## 2.2 The impact of the connection of a distributed source on power and energy losses in a distribution network

In a so-called passive distribution network, the active and reactive power in branches  $P_i(t)$  and  $Q_i(t)$  are exclusively the result of the loads connected behind the feeder supply point of the network branch considered, and the power losses in the branches (which are usually of an order of magnitude of up to several percentage points). Therefore, on the radial distribution feeder, e.g., a 10 kV or 20 kV feeder, the power in the branches decreases as we move away from the feeder supply point toward the feeder end, so that the losses are concentrated at the beginning branches and decrease toward the end of the feeder. Figure 1 presents an example of a 10(20) kV feeder supplied from an x/10(20) kV substation with 5 nodes (the connection points of the x/10(20) kV substation) and 5 branches (lines). The graphs present the active and reactive power flows along the feeder, i.e. along all the branches. The active and reactive consumption in the  $i^{\text{th}}$  node is indicated by  $P_{p-i}$  or  $Q_{p-i}$ .

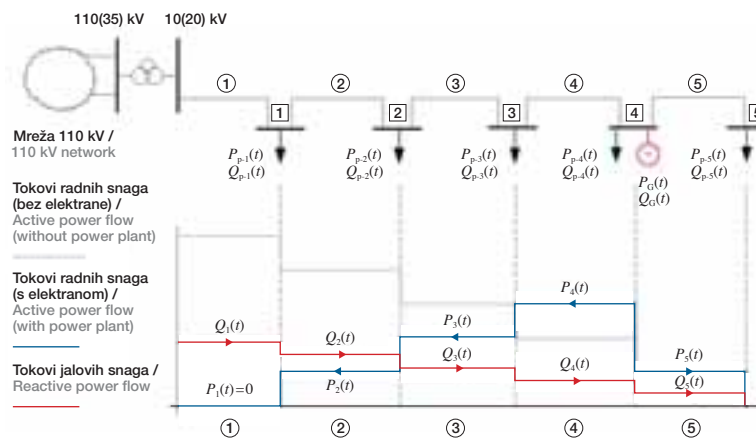
If, for example, a power plant is connected to Node 4, it will generate active power  $P_G(t)$  and reactive power  $Q_G(t)$  at the moment of time  $t$ . Such a network, i.e. the part of the network from the feeder supply point to the node with the power plant connection, is called the active distribution network. In the event that there are no loads on the feeder, the active and reactive power generated by the power plant will flow toward the feeder supply point in equal amounts along all the branches 1 to 4 (also with negligible losses). By superposition of the branch power flows resulting from consumption and the power flows resulting from power plant generation, the situation presented in Figure 2 is obtained. A case has been selected in which the active power of the power plant is equal to the loads on the feeder, while the reactive power of the power plant is equal to zero, since the distributed sources usually operate with a power factor of  $\cos \varphi = 1$ .

However, some cases involve induction generators lacking reactive power compensation, so that a power plant represents an additional reactive power load, thereby increasing the reactive power load of the branches.

**Slika 1**  
Tokovi snaga u granama pasivne distribucijske mreže  
Figure 1  
Power flows in a passive distribution network



**Slika 2**  
Tokovi snaga u granama aktivne distribucijske mreže  
Figure 2  
Power flows in an active distribution network



Prikazani primjer ilustrira tipičnu situaciju u aktivnoj distribucijskoj mreži, u kojoj se mijenja iznos i smjer tokova radnih snaga u svim granama od pojne točke do mjesta priključka elektrane u mreži. Sa stanovišta gubitaka radne snage, elektrana u ovakvom slučaju ima pozitivan učinak, budući da u cjelini smanjuje tokove radnih snaga u mreži, pa tako i gubitke radne snage. Međutim, u slučaju da je proizvodnja radne snage elektrane znatno veća od ukupne potrošnje radne snage na izvodu, dobit će se obrnuti efekt, tj. povećanje ukupnih tokova radne snage po granama, tako da će ukupni gubici radne snage biti veći.

Doprinos rada priključene elektrane na smanjenje/povećanje gubitaka radne snage na promatranom

The example shown illustrates a typical situation in an active distribution network, in which the amount and direction of the active power flows change in all the branches from the feeder supply point to the point at which the power plant is connected to the network. From the standpoint of active power losses, in such a case the power plant has a positive impact, since it decreases the active power flows in the network as a whole, and thereby also the active power losses. However, in the event that the generation of active power by the power plant is significantly greater than the total active power load at the feeder, the opposite effect occurs, i.e. the increase of the total active power flows of the branches, so that the total active power losses will be greater.



izvodu distribucijske mreže za promatrani trenutak lako se izračunava na način da se gubici izračunaju u obje varijante (bez elektrane i sa elektranom). Međutim, za izračun gubitaka radne energije u dužem vremenskom razdoblju, takav proračun je potrebno ponoviti za sve kombinacije potrošnje na izvodu i proizvodnje elektrane, budući da su potrošnja i proizvodnja promjenljive u vremenu i u načelu ne postoji nikakva međusobna ovisnost (korelacija). Dakle, prilikom računanja gubitaka radne energije bitno je uvažiti kronološku podudaranost potrošnje s proizvodnjom distribuiranog izvora [7] i [8], pri čemu smanjenju gubitaka pridonosi njihova vremenska podudaranost (maksimalno opterećenje – maksimalna proizvodnja, minimalno opterećenje – minimalna proizvodnja).

### 3 PRORAČUN GUBITAKA RADNE SNAGE U DISTRIBUCIJSKOJ MREŽI S PRIKLJUČENOM VJETROELEKTRANOM

#### 3.1 Ulazni parametri

Primjer proračuna utjecaja priključka elektrane na gubitke radne snage u distribucijskoj mreži izrađen je na realnoj mreži 30 kV, tj. zračnom vodu TS Bilice – Primošten – Rogoznica. Na taj vod se planira, kao jedna od opcija, priključak vjetroelektrane Orlice snage 11 x 900 kW (9,9 MW), koji bi se izveo kabelom presjeka 3x185 mm<sup>2</sup> Al od lokacije vjetroelektrane do priključnog mjesta na jednom stupu navedenog nadzemnog voda 30 kV koji se koristi se za napajanje TS 30/10 kV Primošten i TS 30/10 kV Rogoznica.

Jednopolna shema promatrane distribucijske mreže i VE Orlice prikazana je na slici 3. Plavom bojom prikazana je transformacija 110/30 kV u TS 220/110/30 kV Bilice odakle se napaja DV 30 kV Bilice – Primošten – Rogoznica koji je prikazan zelenom bojom. Crvenom bojom prikazana je interna kabelska mreža 30 kV VE Orlice zajedno s priključnim kabelom. Topologija interne kabelske mreže VE Orlice rezultat je posebne analize kojom su definirane trase, presjeci i način povezivanja vjetrogeneratora s obzirom na pozicije vjetrogeneratora i pristupne ceste. Oznake vjetrogeneratora VE I-x i VE II-x odnose se na prvu fazu (6 VG) i drugu fazu (5 VG) izgradnje VE Orlice, uz izostavljene vjetrogeneratore druge faze VE II-3 i VE II-4.

The contribution of the operation of the connected power plant to the decrease/increase in the active power losses at a distribution network feeder at a given moment can be easily determined by calculating the losses for both variants, with and without the power plant. However, for the calculation of the active power losses over a longer period of time, it is necessary to repeat such calculations for all the combinations of feeder loads and power plant generation, since consumption and generation are variable in time and in principle are not correlated. Therefore, when calculating active energy losses, it is essential to take the chronological correlation of consumption and generation into account [7] and [8]. Losses are decreased when consumption and generation are synchronous (maximum load – maximum generation, minimum load – minimum generation).

### 3 CALCULATION OF ACTIVE POWER LOSS IN A DISTRIBUTION NETWORK WITH A CONNECTED WIND POWER PLANT

#### 3.1 Input parameters

An example of the calculation of the impact of power plant generation on the active power losses in a distribution network has been performed for an existing 30 kV network, i.e. the overhead line supplying the Primošten and Rogoznica 30/10 kV substations from the Bilice 110/30 kV substation. Among the options is the connection of the Orlice Wind Power Plant (WPP) with a rated power of 11 x 900 kW (9,9 MW) using a 3x185 mm<sup>2</sup> aluminum cable from the wind power plant site to the connection point at one of the poles of the 30 kV overhead line used to supply the Primošten and Rogoznica substations.

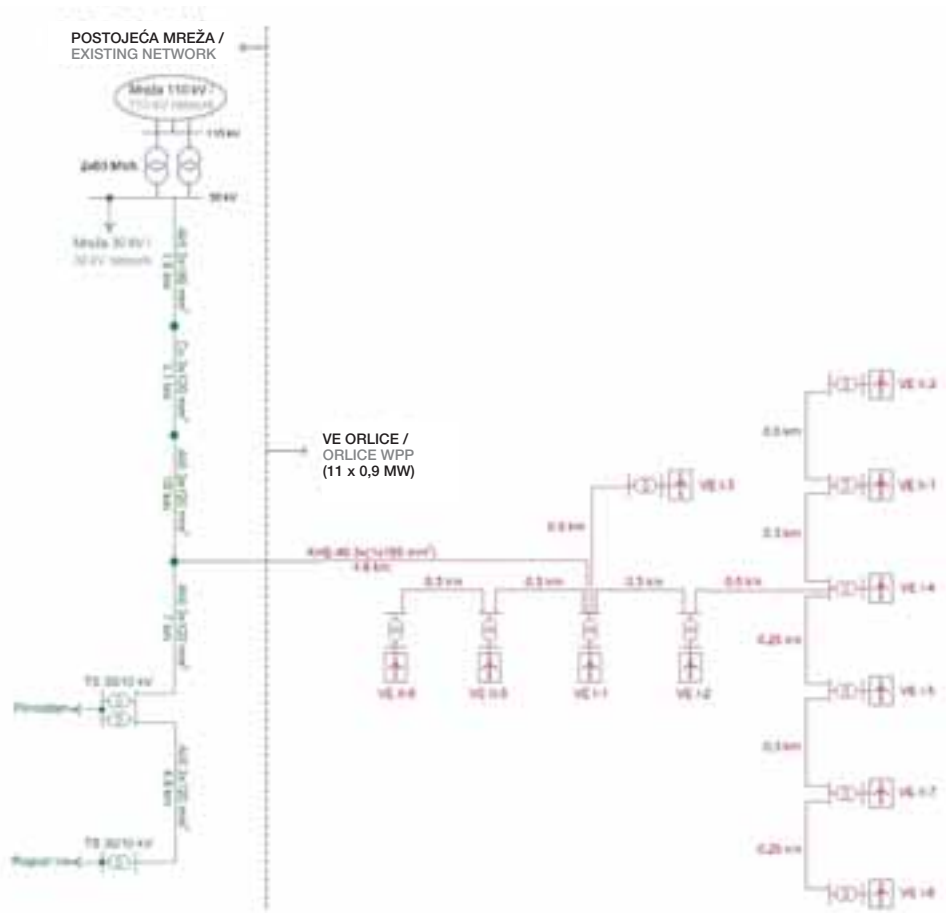
A single-line diagram of this distribution network at the Orlice WPP is presented in Figure 3. Transformation of 110/30 kV is shown in blue at the Bilice 220/110/30 kV substation, which supplies the Bilice – Primošten – Rogoznica 30 kV line, shown in green. The 30 kV internal cable network of the Orlice WPP together with the connection cable is shown in red. The internal cable network topology of the Orlice WPP is the result of a separate analysis according to which the routes, cross-sections and wind turbine interconnection method are defined, regarding the positions of the wind turbines and access roads. The designations VE I-x and VE II-x of the wind turbines refer to the first phase (6 wind turbines) and the second phase (5 wind turbines) of the construction of the Orlice Wind Power Plant,

Mjesto priključka je oko 15 km od početka voda. Tehnički parametri srednjonaponske (SN) mreže i interne kableske mreže vjetroelektrane dani su u tablicama 1 i 2.

omitting the VE II-3 and VE II-4 wind turbines of the third phase.

The connection point is approximately 15 km from the beginning of the overhead line – feeder. The technical parameters of the medium-voltage network and internal cable network of the wind power plant are presented in Tables 1 and 2.

**Slika 3**  
Jednopolna shema distribucijske mreže 30 kV Bilice-Primošten-Rogoznica i VE Orlice  
**Figure 3**  
Single-line diagram of the Bilice-Primošten-Rogoznica 30 kV network and the Orlice WPP



Tablica 1 – Parametri vodova  
Table 1 – Power line data

Tip voda / Line type	$I_{\max}$ (A)	$R_d / R_0$ ( $\Omega/\text{km}$ )	$X_d / X_0$ ( $\Omega/\text{km}$ )	$B_d / B_0$ ( $\mu\text{S}/\text{km}$ )
Al/Č 3x185	535	0,157 / 0,471	0,38 / 1,14	3,25 / 3,25
Al/Č 3x120	345	0,253 / 0,403	0,35 / 1,47	3,3 / 1,98
Cu 3x120	440	0,155 / 0,465	0,38 / 1,14	3,08 / 3,08
XHE 49 3x185	361	0,164/1,07	0,11/0,36	88/88

Tablica 2 – Parametri transformatora  
Table 2 – Transformer data

Transformator / Transformer	Komada / Number	$U_{n1}/U_{n2}/U_{n3}$ (kV)	$S_{n1}/S_{n2}/S_{n3}$ (MVA)	$P_{kSP-S}/P_{kSP-T}/P_{kS-T}$ (KW)	$u_{kP-S}/u_{kP-T}/u_{kS-T}$ (%)	$P_0$ (kW)	$I_0$ (%)	Grupa spoja / Connection
Bilice	2	110 / 30 / 10	63 / 63 / 21	310 / 80 / 67	11 / 12 / 7,7	52,5	0,5	YynOd11
Primošten	2	30 / 10	8	54	7	9,4	4	Yd5
Rogoznica	1	30 / 10	8	54	7	9,4	4	Yd5
VE Orlice	11	0.4 / 30	1	10	6	1,1	2	Yd5

Vršna snaga TS 30/10 kV Primošten iznosi 6 + j 2 MVA, a TS 30/10 kV Rogoznica 2,5 + j 0,8 MVA, tako da je ukupno neistodobno vršno opterećenje izvoda 8,5 + j 2,8 MVA, a faktor istodobnosti je blizu 1, budući da se radi o ljetnom vršnom opterećenju konzuma praktički istih karakteristika. U odnosu na maksimalnu planiranu snagu VE Orlice, vršno radno opterećenje je oko 15 % manje. Budući da se radi o ljetnom vršnom opterećenju u kojem se vrlo rijetko može očekivati maksimalni angažman VE Orlice, za očekivati je relativno česte situacije:

- maksimalne distribucijske potrošnje i minimalne proizvodnje VE Orlice (ljeti),
- minimalne distribucijske potrošnje i maksimalne proizvodnje VE Orlice (proljeće, jesen).

Svi proračuni gubitaka radne snage i energije u distribucijskoj mreži ograničeni su na DV 30 kV Bilice – Primošten – Rogoznica i transformatore 30/10 kV Primošten i Rogoznica, dakle bez transformacije 110/30 kV i prijenosne mreže.

### 3.2 Rezultati proračuna

Proračun gubitaka radne snage u prethodno opisanoj mreži 30 kV napravljen je uz pretpostavku priključene VE Orlice, pri čemu je pretpostavljen režim potpune kompenzacije jalove snage, tj. svaki vjetroagregat radi s faktorom snage  $\cos \varphi = 1$ . Proračuni su napravljeni na modelu u programskom paketu PowerCAD za različite kombinacije potrošnje u mreži i proizvodnje VE Orlice.

Tablica 3 prikazuje izračunate gubitke radne snage u ovisnosti o opterećenju (potrošnja TS Primošten i TS Rogoznica), što je osnovna referenca za daljnje proračune gubitaka radne snage i energije.

The peak power of the Primošten 30/10 kV substation amounts to 6 + j 2 MVA, and that of the Rogoznica 30/10 kV substation is 2,5 + j 0,8 MVA, so that the total non-simultaneous feeder peak load is 8,5 + j 2,8 MVA, and the coincidence load factor is close to 1, since this is a case of a summer peak load of two substations supplying similar loads. In relation to the maximum planned power rating of the Orlice WPP, the active power peak load is approximately 15 % lower. Since this is a case of a summer peak load in which the maximum generation of the Orlice WPP will occur very rarely, the following situations can be expected to occur relatively often:

- maximum distribution consumption and minimum generation of the Orlice WPP (summer),
- minimum distribution consumption and maximum generation of the Orlice WPP (spring and autumn).

All the calculations of the active power and energy losses in the distribution network are limited to the Bilice – Primošten – Rogoznica 30 kV overhead line and the Primošten and Rogoznica 30/10 kV transformers, i.e. without 110/30 kV transformation and the transmission network.

### 3.2 Calculation results

Calculations of active power losses in the previously described 30kV network have been performed under the assumption that the Orlice WPP is connected, and it was also assumed that the reactive power was fully compensated, i.e. each wind generator operates at a power factor of  $\cos \varphi = 1$ . The calculations were performed on a model using PowerCAD software for various load combinations in the network and generation of the Orlice WPP.

Table 3 presents the calculated load-dependent active power losses (consumption of the Primošten and Rogoznica substations), which is the basic reference for the further calculation of the reactive power and energy losses.

Tablica 3 – Gubici snage u mreži 30 kV bez VE Orlice  
Table 3 – Power losses in the 30 kV network without the Orlice WPP

Potrošnja / Load (%)	30	40	50	60	70	80	90	100
Gubici snage / Active power loss (kW)	87	127	176	240	318	412	524	656

U tablici 4, prikazani su rezultati proračuna gubitaka radne snage u mreži 30 kV na način da je varirana proizvodnja VE Orlice od 10 %  $P_n$  do  $P_n$ , te potrošnja od 30 %  $P_{peak}$  do  $P_{peak}$ . Gubici radne snage računati su za svaku kombinaciju potrošnje i proizvodnje, tako da su rezultati prikazani u matricnom obliku. Prvi redak približno odgovara stanju bez VE Orlice (proizvodnja VE Orlice = 0), ali su gubici radne snage neznatno manji u odnosu na vrijednosti iz tablice 3, budući da kabela mreža 30 kV VE Orlice u praznom hodu proizvodi jalovu snagu i injektira je u zračni vod 30 kV, smanjujući na taj način tokove jalovih snaga.

In Table 4, the results of the calculation of the active power losses in the 30 kV network are presented in such a manner that the Orlice WPP generation varied from 10 %  $P_n$  to  $P_n$ , and the load from 30 %  $P_{peak}$  to  $P_{peak}$ . Active power losses were calculated for each combination of load and generation and the results were presented in matrix form. The first row approximately corresponds to the situation without the Orlice WPP (Orlice WPP generation = 0). The active power losses are insignificantly lower than the values from Table 3, since the unloaded 30 kV cable network of the Orlice WPP generates reactive power and injects it into the 30 kV overhead line, thereby reducing the reactive power flows.

Tablica 4 – Gubici radne snage u mreži 30 kV ovisno o angažiranju VE Orlice (kW)  
Table 4 – Active power losses in the 30 kV network in relation to generation of the Orlice WPP

		Potrošnja / Load (%)							
		30 %	40 %	50 %	60 %	70 %	80 %	90 %	100 %
Snaga VE Orlice / Orlice WPP power (MW)	0	82	121	169	231	308	400	510	640
	0,99	67	99	140	195	264	348	449	568
	1,98	59	84	119	167	229	304	397	507
	2,97	58	77	106	147	201	270	353	455
	3,96	65	77	100	135	182	243	319	412
	4,95	78	85	101	130	170	224	293	378
	5,94	97	99	109	131	166	213	274	352
	6,93	124	120	124	140	168	209	264	334
	7,92	156	147	145	156	178	213	261	324
	8,91	195	181	172	178	195	223	265	322
	9,90	240	221	206	206	218	241	277	327

Rezultati iz tablice 4 prikazani su grafički na slikama 4, 5 i 6. Na slici 4 prikazana je krivulja gubitaka radne snage u mreži 30 kV ovisno o opterećenju mreže i proizvodnji VE Orlice. Tamno plava linija prikazuje gubitke radne snage kad VE Orlice nije priključena na distribucijsku mrežu. Područje osjenčano svjetlo plavom bojom prikazuje granicu u kojoj se kreću gubici radne snage u mreži 30 kV u slučaju da je priključena VE Orlice, a raspon se odnosi na angažiranje VE Orlice 0 do  $P_n$ .

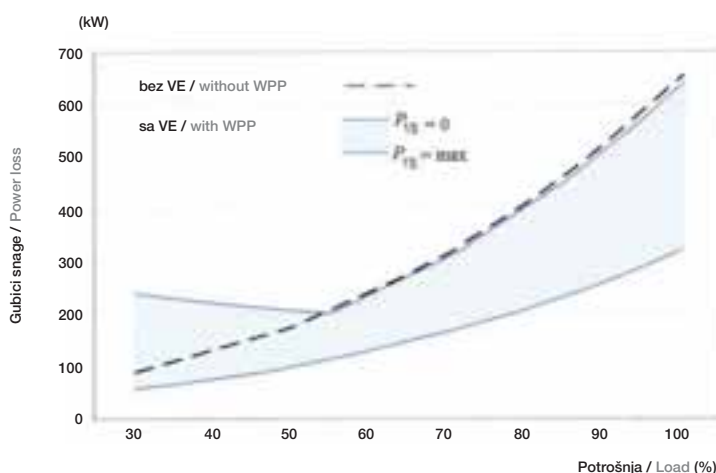
The results from Table 4 are presented graphically in Figures 4, 5 and 6. Figure 4 presents the active power loss curve in the 30 kV network as a function of the network load and generation of the Orlice WPP. The dark blue line shows the active power losses when the Orlice WPP is not connected to the distribution network. The light blue shaded area shows the range of the active power losses in the 30 kV network when the Orlice WPP is connected, as a function of its generation, 0 to  $P_n$ .

Na slikama 5 i 6 prikazane su apsolutne, odnosno postotne promjene ukupnih gubitaka snage na DV Bilice – Primošten – Rogoznica, ovisno o opterećenju mreže i veličini angažiranja VE Orlice. Kao referenca za promjenu gubitaka uzeti su podaci iz tablice 3, tj. gubici bez VE Orlice, prema postojećem stanju mreže.

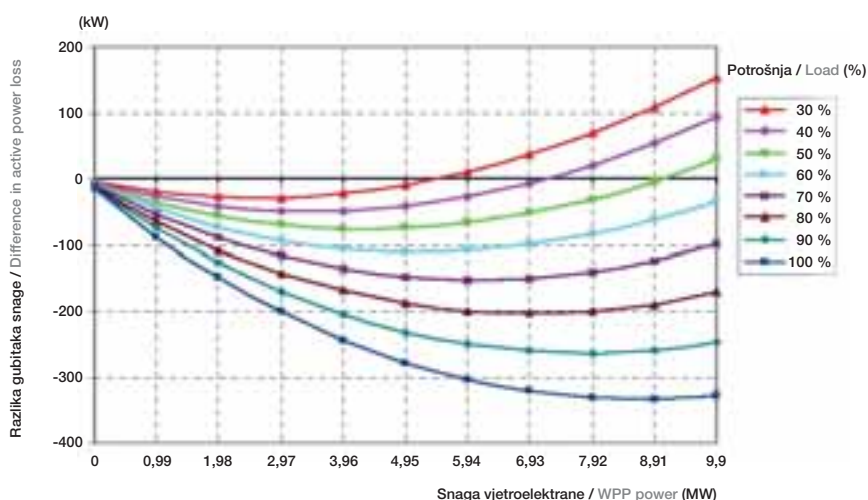
Iz slika 4 do 6 jasno se uočava uglavnom pozitivan utjecaj priključka VE Orlice u smislu smanjenja gubitaka radne snage u distribucijskoj mreži na koju se priključuje. Priključak VE Orlice povećava gubitke radne snage jedino u kombinacijama niske potrošnje i visoke proizvodnje.

Figures 5 and 6 present the absolute or percentage changes in the total power losses on the Bilice – Primošten – Rogoznica overhead line, as a function of network load and generation of the Orlice WPP. Data from Table 3, i.e. energy losses prior to the connection of the Orlice WPP, were used as reference values indicating the existing status of the network.

From Figures 4 to 6, the generally positive impact of the connection of the Orlice WPP is evident in reducing active power losses in the distribution network to which it is connected. Connection of the Orlice WPP only increases active power losses in combinations of low loads and high generation.



**Slika 4**  
 Raspon gubitaka radne snage u mreži 30 kV u slučaju priključka VE Orlice  
 Figure 4  
 Active power losses in the 30 kV network with the Orlice WPP connected



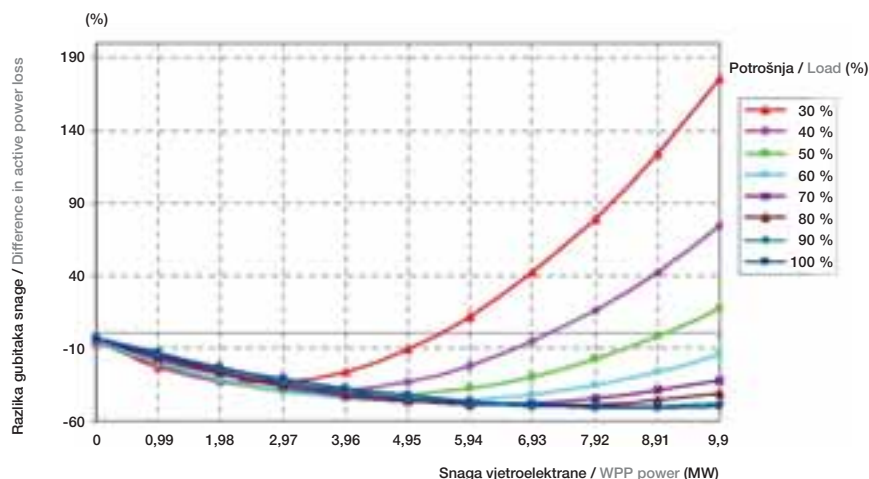
**Slika 5**  
 Apsolutne promjene gubitaka radne snage u mreži 30 kV u slučaju priključka VE Orlice  
 Figure 5  
 Absolute active power loss changes in the 30 kV network with the Orlice WPP connected

**Slika 6**

Postotne promjene gubitaka radne snage u mreži 30 kV u slučaju priključka VE Orlice

**Figure 6**

Active power losses in the 30 kV network with the Orlice WPP connected (%)



## 4 PRORAČUN GODIŠNJIH GUBITAKA RADNE ENERGIJE U DIŠTRIBUCIJSKOJ MREŽI S PRIKLJUČENOM VJETROELEKTRANOM

### 4.1 Ulazni parametri

Za točan proračun godišnjih gubitaka radne energije u istom primjeru iz prethodnog poglavlja potrebno je poznavati:

- kronološku krivulju opterećenja TS 30/10 kV Primošten i TS 30/10 kV Rogoznica, tj. satne potrošnje u razdoblju od 1 godine,
- kronološku krivulju proizvodnje VE Orlice, tj. satne proizvodnje u razdoblju od 1 godine.

S obzirom da za promatranu mrežu nije bila dostupna kronološka krivulja potrošnje, korišteni su izmjereni podaci iz druge TS 35/10 kV (prosječna satna opterećenja), normirani po vršnoj snazi na poznato vršno opterećenje DV 30 kV Bilice – Primošten – Rogoznica. Jalova snaga potrošača pretpostavljena je proporcionalna radnoj, uz konstantan faktor snage  $\cos \varphi = 0,95$ .

Za simulaciju proizvodnje VE Orlice nisu korišteni podaci o brzinama vjetra s lokacije Orlice, već su korišteni izmjereni jednogodišnji podaci s druge lokacije (brzina vjetra usrednjena na satne intervale). Zbog toga se izračunati parametri ne mogu direktno primijeniti na promatranu mrežu i vjetroelektranu, već samo kao ilustracija opisane metodologije.

## 4 CALCULATION OF ANNUAL ACTIVE ENERGY LOSS IN A DISTRIBUTION NETWORK WITH A WIND POWER PLANT CONNECTED

### 4.1 Input parameters

For the precise calculation of annual active energy losses in the same example from the previous chapter, it is necessary to know the following:

- the chronological load curve of the 30/10 kV Primošten and 30/10 kV Rogoznica substations, i.e. hourly loads during a 1-year period,
- the chronological generation curve of the Orlice WPP, i.e. hourly generation during a 1-year period.

Since a chronological load curve was not available for the network considered, measured data (average hourly loads) from another 35/10 kV substation were used, normalized according to peak power for the known peak load of the 30 kV Bilice-Primošten-Rogoznica line. The reactive power loads were assumed to be proportional to the active power loads, with a constant power factor of  $\cos \varphi = 0,95$ .

For the simulation of the Orlice WPP generation, wind speed data from the Orlice location were not used. Instead, data measured for one year from another location were employed (wind speed averaged at hourly intervals). Therefore, the calculation parameters cannot be applied directly to the considered network and wind power plant but only as an illustration of the described methodology.

Kronološka krivulja proizvodnje VE Orlice slijedi iz kronološke krivulje brzina vjetra i  $P$ - $v$  karakteristike vjetroagregata Enercon E-44 koji je pretpostavljen za VE Orlice. Radi se o sinkronom generatoru nazivne snage 900 kW, s direktnim pogonom i indirektnim priključkom na mrežu (preko pretvarača). U proračunu je pretpostavljena jednaka brzina vjetra na svih 11 lokacija vjetroagregata, te režim potpune kompenzacije jalove snage vjetrogeneratora VE Orlice ( $\cos \varphi = 1$ ).

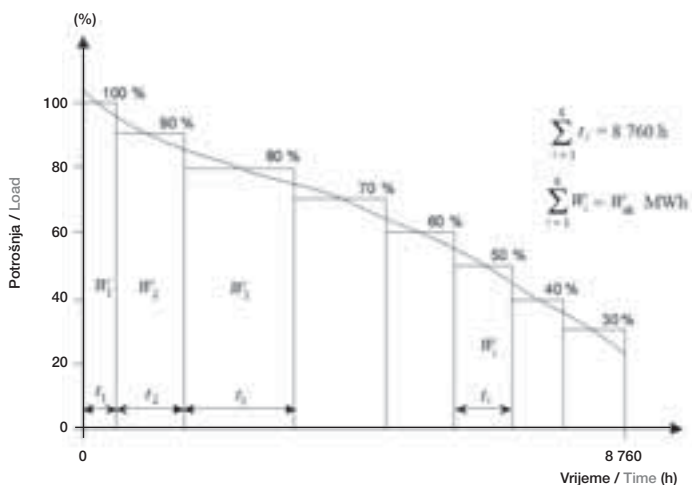
Da bi se reducirala potreba za izvođenjem 8 760 proračuna tokova snaga na razumnu mjeru, proračun je izveden pomoću krivulje trajanja potrošnje i krivulje trajanja proizvodnje VE Orlice, aproksimacijom krivulja na manji broj segmenata konstantne snage. Međutim, istodobnost distribucijske potrošnje i proizvodnje VE Orlice nije na taj način izgubljena, već je modelirana izdvojeno zasebnim proračunom koji će naknadno biti opisan.

Godišnja krivulja trajanja potrošnje formirana je na osnovi kronološke krivulje potrošnje, te je segmentirana na 8 diskretnih iznosa snaga u rasponu od 30 % do 100 % vršnog opterećenja s korakom 10 % (slika 7). Pri tome svaki segment koji je predstavljen snagom  $P_i$  reprezentira (aproksimira) snage u rasponu  $P_i - 5\%P_{\text{peak}} \leq P_i < P_i + 5\%P_{\text{peak}}$ . Sa  $P_{\text{peak}}$  označena je snaga koja odgovara prvom segmentu i nešto je manja od stvarnog maksimalnog opterećenja.

The chronological generation curve of the Orlice WPP is derived from the chronological wind speed curve and  $P$ - $v$  curve of the Enercon E-44 Wind Generator, which is assumed for the Orlice WPP. This is a synchronous generator with a rated power of 900 kW, direct drive and an indirect network connection using a converter. In the calculation, a uniform wind speed was assumed for all 11 wind generator locations, and the reactive power of the Orlice WPP was fully compensated ( $\cos \varphi = 1$ ).

In order to reduce the necessary 8 760 load-flow calculations to a reasonable number, calculation was performed using the load duration curve and the generation duration curve of the Orlice WPP, with an approximated curve for a smaller number of segments with constant power. However, the coincidence of the distribution consumption and generation of the Orlice WPP was not lost in this manner but modeled separately by a calculation that will be described subsequently.

The annual load duration curve is formed on the basis of the chronological load curve and segmented into 8 discrete parts with constant power, ranging from 30 % to 100 % of the peak load, with a 10 % increment (Figure 7). Moreover, each segment designated by power  $P_i$  represents (approximates) power in the range of  $P_i - 5\%P_{\text{peak}} \leq P_i < P_i + 5\%P_{\text{peak}}$ .  $P_{\text{peak}}$  stands for power that corresponds to the first segment and is somewhat lower than the existing maximum load.



**Slika 7**  
Aproksimacija  
krivulje trajanja  
potrošnje  
Figure 7  
Approximated load  
duration curve

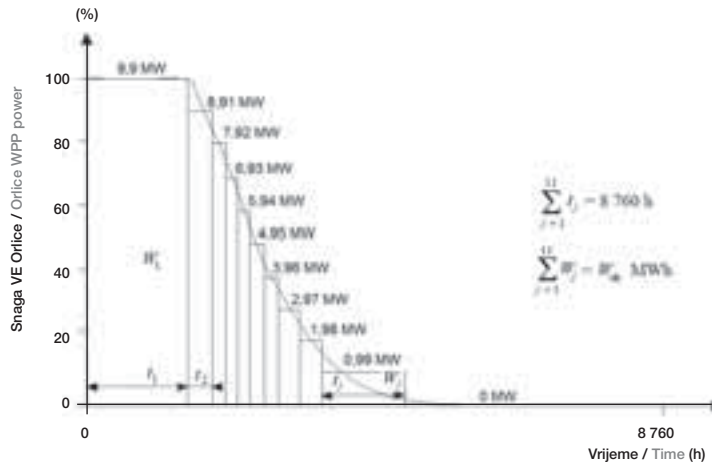
Godišnja krivulja trajanja proizvodnje VE Orlice također je formirana na osnovi kronološke krivulje trajanja proizvodnje izračunate preko kronološke krivulje brzine vjetra i  $P$ - $v$  krivulje odabranog vjetroagregata, a segmentirana je na 11 diskretnih iznosa snaga pojedinačnog vjetroagregata u rasponu od 0 do 900 x 11 kW uz korak 90 x 11

The annual generation duration curve of the Orlice WPP is also formed on the basis of the chronological generation curve calculated using the chronological wind speed curve and the  $P$ - $v$  curves of the selected wind turbine, and segmented into 11 discrete power units of an individual wind power plant ranging from 0 to 900 x 11 kW, with an increment

kW (slika 8), tj. u rasponu od 0%  $P_n$  do 100%  $P_n$  s korakom 10%  $P_n$ . Svaki segment predstavljen snagom  $P_j$  reprezentira (aproksimira) proizvodnju VE Orlice u rasponu  $P_j - 5\%P_n \leq P_j < P_i + 5\%P_n$ , osim prvog i zadnjeg segmenta za koje je  $P_1 = P_n$ , odnosno  $P_{11} = 0$ .

of 90 x 11 kW (Figure 8), i.e. ranging from 0 %  $P_n$  to 100 %  $P_n$ , with an increment of 10 %  $P_n$ . Each segment designated by power  $P_j$  represents (approximates) the generation of the Orlice WPP with a range of  $P_j - 5\%P_n \leq P_j < P_i + 5\%P_n$ , with the exception of the first and last segments, for which  $P_1 = P_n$  and respectively  $P_{11} = 0$ .

**Slika 8**  
Aproximacija  
krivulje trajanja  
proizvodnje VE Orlice  
Figure 8  
Approximated Orlice  
WPP generation  
duration curve



#### 4.2 Modeliranje istodobnosti distribucijske potrošnje i proizvodnje vjetroelektrane

Istodobnost distribucijske potrošnje i proizvodnje VE Orlice uvažena je formiranjem matrice učestalosti istodobne pojave opterećenja koji odgovara  $i$ -tom segmentu krivulje sa slike 7 i proizvodnje VE Orlice koja odgovara  $j$ -tom segmentu krivulje sa slike 8. Dakle, na temelju kronoloških krivulja opterećenja distribucijske mreže i proizvodnje VE Orlice određuje se godišnji postotni iznos vremena za svaku kombinaciju opterećenja distribucijske mreže i proizvodnje VE Orlice kako slijedi:

- formiraju se vektori prosječne satne snage distribucijske mreže i satne snage VE Orlice:
  - $[P_{\text{distr}}]_{(8760 \times 1)}$ , gdje je  $P_{\text{distr}}(k)$  prosječna satna snaga distribucijske potrošnje u  $k$ -tom satu
  - $[P_{\text{VE}}]_{(8760 \times 1)}$ , gdje je  $P_{\text{VE}}(k)$  prosječna satna snaga VE Orlice u  $k$ -tom satu,

- računaju se dvije matrice:

$$[p_{\text{distr}}]_{(8760 \times 8)},$$

gdje je element matrice definiran sa:

$$p_{\text{distr}}(k, i) = \begin{cases} 1, & \text{ako je / if } P_i - 5\% P_{\text{peak}} \leq P_{\text{distr}}(k) < P_i + 5\% P_{\text{peak}} \\ 0, & \text{inače / otherwise} \end{cases}$$

#### 4.2 Modeling of the coincidence of the distribution consumption and wind power plant generation

The coincidence of distribution consumption and Orlice WPP generation has been taken into account in the formation of a frequency matrix of the coincidence of consumption, corresponding to the  $i$ -th curve segment in Figure 7, and Orlice WPP generation, corresponding to the  $j$ -th curve segment in Figure 8. Therefore, based upon the chronological load curves of the distribution network and Orlice WPP generation, the annual percentages of the duration of each combination of loads on the distribution network and Orlice WPP generation are determined, as follows:

- the vectors of the average hourly load of the distribution network and wind power plant generation are formed as follows:
  - $[P_{\text{distr}}]_{(8760 \times 1)}$ , where  $P_{\text{distr}}(k)$  is the average hourly load of the distribution network at hour  $k$
  - $[P_{\text{VE}}]_{(8760 \times 1)}$ , where  $P_{\text{VE}}(k)$  is the average Orlice WPP generation at hour  $k$

- two matrices are calculated:

$$[p_{\text{distr}}]_{(8760 \times 8)},$$

where the matrix element is defined as:



$$[p_{VE}]_{(8760 \times 11)},$$

gdje je element matrice definiran sa:

$$p_{VE}(k,1) = \begin{cases} 1, & \text{ako je / if } P_{VE}(k) = P_n \\ 0, & \text{inače / otherwise} \end{cases}$$

$$p_{VE}(k,j) = \begin{cases} 1, & \text{ako je / if } P_j - 5\% P_n \leq P_{VE}(k) < P_j + 5\% P_n \\ 0, & \text{inače / otherwise} \end{cases}, \text{ za } j = 2, \dots, 10.$$

$$p_{VE}(k,11) = \begin{cases} 1, & \text{ako je / if } P_{VE}(k) = 0 \\ 0, & \text{inače / otherwise} \end{cases}$$

$$[p_{VE}]_{(8760 \times 11)},$$

where the matrix element is defined as:

Jedinica u matricama  $[p_{distr}]$  i  $[p_{VE}]$  zapravo predstavlja pojavljivanje odgovarajuće potrošnje/proizvodnje u  $k$ -tom satu unutar odgovarajućeg segmenta aproksimiranih krivulja potrošnje i proizvodnje. Dakle, u svakom retku navedenih matrica pojavljuje se točno jedna jedinica, i to u onom stupcu koji predstavlja  $i$ -ti odnosno  $j$ -ti segment aproksimirane krivulje distribucijske potrošnje, odnosno proizvodnje VE Orlice. Množenjem matrica  $[p_{VE}]^T$  i  $[p_{distr}]$  dobije se matrica učestalosti istodobne pojave opterećenja distribucijske mreže i proizvodnje VE Orlice:

$$[p_{distr\_VE}]_{(11 \times 8)} = \frac{[p_{VE}]^T \cdot [p_{distr}]}{8760},$$

za koju vrijedi:

- $p_{distr\_VE}(j,i)$  predstavlja vjerojatnost istodobnog pojavljivanja proizvodnje VE Orlice u  $j$ -tom intervalu aproksimirane krivulje trajanja proizvodnje s distribucijskom potrošnjom u  $i$ -tom intervalu aproksimirane krivulje trajanja potrošnje,

$$-\sum_{j=1}^{11} \sum_{i=1}^8 p_{distr\_VE}(j,i) = 1.$$

#### 4.3 Rezultati proračuna

Izračunata matrica  $[p_{distr\_VE}]$  prikazana je u tablici 5, na način da su njeni elementi (odgovarajuće vjerojatnosti) dani u postotnim iznosima, a također je izračunata i suma vjerojatnosti po redcima i stupcima, što odgovara udjelima pojedinih segmenata aproksimirane krivulje trajanja distribucijske potrošnje i proizvodnje VE Orlice (slike 9 i 10).

In the matrices  $[p_{distr}]$  and  $[p_{VE}]$ , the integer 1 actually represents load/generation at hour  $k$  within the corresponding segments of the approximated load/generation curves. Thus, in each row of these matrices, the integer 1 occurs only once, in the column representing the  $i$ -th or  $j$ -th segment of the approximated load distribution curve or the Orlice WPP generation curve. By multiplying matrices  $[p_{VE}]^T$  and  $[p_{distr}]$ , the frequency matrix of the simultaneous distribution network power load and Orlice WPP generation is obtained:

$$[p_{distr\_VE}]_{(11 \times 8)} = \frac{[p_{VE}]^T \cdot [p_{distr}]}{8760},$$

for which the following apply:

- $p_{distr\_VE}(j,i)$  represents the probability of the simultaneous occurrence of Orlice WPP generation in the  $j$ -th interval of the approximated generation duration curve and distribution consumption in the  $i$ -th interval of the approximated load duration curve.

$$-\sum_{j=1}^{11} \sum_{i=1}^8 p_{distr\_VE}(j,i) = 1.$$

#### 4.3 Calculation results

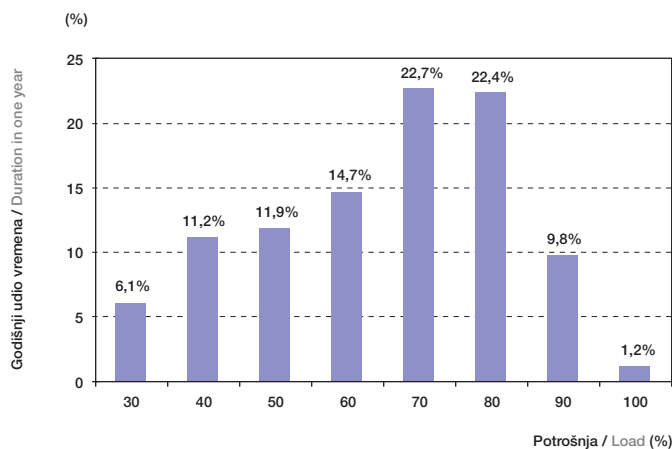
The calculated matrix  $[p_{distr\_VE}]$  is presented in Table 5 in such a manner that its elements (corresponding values) are given in percentages and the sums of the probabilities are calculated for the rows and columns, corresponding to the percentages of the individual segments of the approximated distribution consumption duration curve and the Orlice WPP generation curve (Figures 9 and 10).

Tablica 5 – Matrica učestalosti istovremenog pojavljivanja distribucijske potrošnje i proizvodnje VE Orlice  
 Table 5 – Frequency matrix of the simultaneous distribution network power load and Orlice WPP generation

		Potrošnja / Load (%)								
		30 %	40 %	50 %	60 %	70 %	80 %	90 %	100 %	Σ
Snaga VE Orlice / Orlice WPP power (MW)	0	0,93 %	1,83 %	2,11 %	2,36 %	3,50 %	3,47 %	1,57 %	0,14 %	15,9 %
	0,99	2,75 %	4,95 %	5,16 %	6,48 %	10,53 %	9,42 %	4,07 %	0,53 %	43,9 %
	1,98	0,51 %	0,90 %	0,65 %	1,11 %	1,60 %	2,25 %	0,76 %	0,19 %	8,0 %
	2,97	0,39 %	0,39 %	0,72 %	0,83 %	1,25 %	1,25 %	0,60 %	0,00 %	5,4 %
	3,96	0,42 %	0,63 %	0,46 %	0,81 %	0,88 %	1,16 %	0,56 %	0,07 %	5,0 %
	4,95	0,23 %	0,37 %	0,39 %	0,58 %	0,74 %	1,02 %	0,46 %	0,07 %	3,9 %
	5,94	0,28 %	0,46 %	0,42 %	0,65 %	0,86 %	0,83 %	0,32 %	0,05 %	3,9 %
	6,93	0,14 %	0,44 %	0,35 %	0,35 %	0,60 %	0,53 %	0,32 %	0,00 %	2,7 %
	7,92	0,14 %	0,32 %	0,35 %	0,37 %	0,76 %	0,65 %	0,16 %	0,02 %	2,8 %
	8,91	0,21 %	0,44 %	0,76 %	0,56 %	1,18 %	1,09 %	0,53 %	0,07 %	4,8 %
	9,90	0,12 %	0,49 %	0,49 %	0,60 %	0,76 %	0,76 %	0,44 %	0,07 %	3,7 %
	Σ		6,11 %	11,23 %	11,85 %	14,70 %	22,66 %	22,43 %	9,81 %	1,20 %

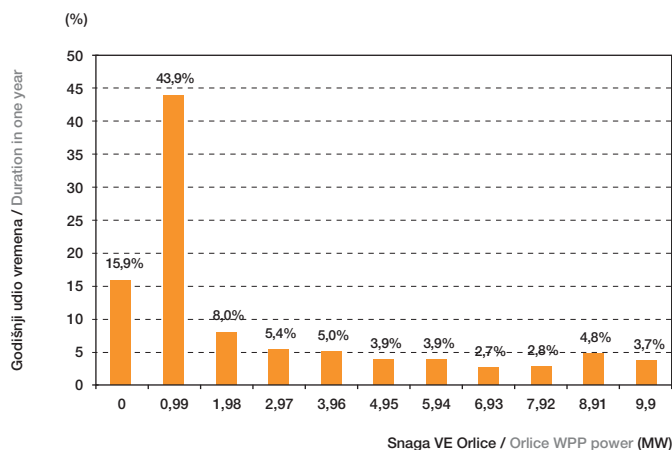
Slika 9

Postotni udjeli trajanja segmenta krivulje trajanja opterećenja  
 Figure 9  
 Frequency of load duration curve segments



Slika 10

Postotni udjeli trajanja segmenta krivulje trajanja proizvodnje  
 Figure 10  
 Frequency of generation duration curve segments



Znajući matricu učestalosti  $[p_{\text{distr\_VE}}]$ , izračun godišnjih gubitaka radne energije u promatranom dijelu distribucijske mreže svodi se na proračun  $11 \times 8 = 88$  varijanti tokova snaga, za svaku kombinaciju distribucijske potrošnje  $P_j$  i snage VE Orlice  $P_j$ . Množenjem u svakoj varijanti izračunatih gubitaka radne snage s odgovarajućim vjerojatnostima definiranim preko matrice  $[p_{\text{distr\_VE}}]$  i ukupnim brojem sati u godini, dobiju se gubici radne energije u podrazdobljima. Konkretno vrijednosti gubitaka radne snage za svaku kombinaciju već su izračunate u poglavlju 3 i prikazane u tablici 4. Sumiranjem gubitaka energije za sve kombinacije dobiju se ukupni godišnji gubici radne energije u promatranom dijelu distribucijske mreže:

If the frequency matrix  $[p_{\text{distr\_VE}}]$  is known, the calculation of annual active energy losses in part of the distribution network considered is reduced to the calculation of  $11 \times 8 = 88$  variants of the power flows, for each combination of load  $P_j$  and the power rating of the Orlice WPP  $P_j$ . By multiplying the calculated active power losses in each variant by the corresponding probabilities defined by the matrix  $[p_{\text{distr\_VE}}]$  and the total number of hours in a year, the active energy losses are obtained for the subintervals. The values of the active power losses for each combination have already been calculated in Chapter 3 and presented in Table 4. By adding together the energy losses for each combination, the total annual active energy losses for the part of the distribution network considered are obtained:

$$\Delta W_{\text{UK}}^{\text{r}} = 8\,760 \cdot \sum_{j=1}^{11} \sum_{i=1}^8 p_{\text{distr\_VE}}(j,i) \cdot \Delta P(j,i), \quad (8)$$

gdje je:

where:

$\Delta P(j,i)$  oznaka za gubitke radne snage u mreži za kombinaciju proizvodnje  $P_j$  i potrošnje  $P_i$ .

$\Delta P(j,i)$  designates the active power losses in the network for the combination of generation  $P_j$  and load  $P_i$ .

U tablici 6 prikazani su godišnji gubici radne energije u promatranom dijelu distribucijske mreže u varijanti kad nije priključena VE Orlice, dok su u tablici 7 prikazani odgovarajući gubici radne energije u slučaju priključka VE Orlice izračunati prethodno opisanom metodom.

Table 6 presents the annual active energy losses in the considered part of the distribution network when the Orlice WPP is not connected, while Table 7 presents the corresponding active energy losses when the Orlice WPP is connected, as calculated by the previously described method.

Tablica 6 – Ukupni godišnji gubici energije u mreži 30 kV bez VE Orlice  
Table 6 – Annual active energy losses in the 30 kV network without the Orlice WPP (MWh)

Potrošnja / Load (%)	30	40	50	60	70	80	90	100	–
Gubici energije / Energy losses (MWh)	46,66	124,90	182,72	309,03	631,29	809,54	450,52	69,17	2 624

Tablica 7 – Ukupni godišnji gubici energije u mreži 30 kV sa VE Orlice (MWh)  
Table 7 – Annual active energy losses in the 30 kV network with the Orlice WPP (MWh)

		Potrošnja / Load (%)								
		30 %	40 %	50 %	60 %	70 %	80 %	90 %	100 %	Σ
Snaga VE Orlice / Orlice WPP power (MW)	0	6,68	19,38	31,19	47,78	94,31	121,67	70,32	7,79	399,1
	0,99	16,14	42,95	63,31	110,72	243,58	287,21	160,24	26,49	950,6
	1,98	2,63	6,67	6,76	16,25	32,04	59,80	26,57	8,22	158,9
	2,97	2,01	2,66	6,66	10,73	22,01	29,57	18,61	0,00	92,3
	3,96	2,35	4,24	4,06	9,58	14,02	24,64	15,52	2,51	76,9
	4,95	1,57	2,75	3,48	6,59	11,03	19,99	11,88	2,30	59,6
	5,94	2,37	4,01	3,98	7,44	12,45	15,55	7,78	1,43	55,0
	6,93	1,51	4,62	3,77	4,26	8,86	9,75	7,49	0,00	40,3
	7,92	1,90	4,17	4,41	5,06	11,91	12,09	3,70	0,66	43,9
	8,91	3,56	6,97	11,51	8,66	20,17	21,25	12,36	1,96	86,4
	9,90	2,43	9,41	8,77	10,86	14,59	16,13	10,67	1,99	74,9
	Σ	43,2	107,8	147,9	237,9	485,0	617,6	345,2	53,3	2037,9

Dakle, izračunati godišnji gubici radne energije u promatranom dijelu mreže 30 kV bez VE Orlice iznose 2 624 MWh (što je u odnosu na ukupnu godišnju distribucijsku potrošnju oko 5,3 %), dok se u slučaju priključka VE Orlice smanjuju na 2 038 MWh, tj. za 22 %.

S obzirom da ukupna godišnja proizvodnja VE Orlice iznosi 41 % distribucijske potrošnje, smanjenje godišnjih gubitaka radne energije je bilo i intuitivno za očekivati zbog smanjenja opterećenja distribucijske mreže.

Neproporcionalno smanjenje gubitaka u odnosu na smanjenje ukupno preuzete energije iz transformacije 110/30 kV rezultat je povećanja gubitaka u razdobljima visokog angažmana VE Orlice i niskog opterećenja u mreži, te prvenstveno činjenice da su gubici na DV 30 kV i transformatorima 30/0,4 kV dalje od mjesta priključka VE Orlice (oko 40 % od ukupnih gubitaka radne energije) ostali nepromijenjeni. Ukoliko bi promatrali samo dio mreže 30 kV od pojne točke do mjesta priključka VE Orlice, godišnji gubici radne energije se smanjuju za 37 %.

Značajan doprinos smanjenju godišnjih gubitaka radne energije zbog rada VE Orlice može se također očekivati i u transformatoru 110/30 kV, što nije uključeno u prethodni proračun. Naime, kod transformatora 110/30 kV gubici radne snage u svakom trenutku se smanjuju injektiranjem snage iz VE Orlice, budući da je minimalno opterećenje transformacije 110/30 kV veće od maksimalne snage VE Orlice.

Thus, the calculated annual active energy losses in the considered part of the 30 kV network without the Orlice WPP amount to 2 624 MWh, which is approximately 5,3 % of the total annual distribution network consumption and is reduced to 2 038 MWh, i.e. 22 %, when the Orlice WPP is connected.

Since the total annual generation of the Orlice WPP amounts to 41 % of the distribution consumption, reduction of the annual active energy losses could be anticipated intuitively due to the reduced distribution network load.

Disproportional reduction in losses in comparison to the reduction in the total energy input from the 110/30 kV substation is due to increased losses during periods of high generation by the Orlice WPP and low network consumption, and especially the fact that the losses on the 30 kV overhead lines and the 30/0,4 kV transformers after the connection point of the Orlice WPP (approximately 40 % of the total active energy losses) remained unchanged. If we consider only the part of the 30 kV network from the supply point to the connection point of the Orlice WPP, annual active energy losses are reduced by 37 %.

A significant contribution to the reduction in the annual active energy losses due to the operation of the Orlice WPP can also be anticipated in the 110/30 kV transformer, which was not included in the previous calculation. The active power losses of the 110/30 kV substation are continuously being reduced by the injection of power from the Orlice WPP, since the minimum substation loading is greater than the maximum power of the Orlice WPP.

#### 4.4 Mogućnosti daljnjeg pojednostavljenja proračuna

Prikazana metoda pruža mogućnost točnog izračuna godišnjih gubitaka radne energije u distribucijskoj mreži na koju je priključena vjetroelektrana, na način da se znatno reducira potreban broj proračuna tokova snaga (u primjeru sa 8 760 na 88 proračuna). Međutim, još uvijek je u velikoj mjeri vremenski zahtjevna i nepraktična, jer je ipak potrebno poznavati godišnju kronološku krivulju trajanja opterećenja i godišnju kronološku krivulju trajanja brzina vjetra (snaga vjetroelektrane), što često nije raspoloživo. Zbog toga se može postaviti pitanje koliko je pogrešku za očekivati u slučaju potpunog zanemarenja istodobnosti distributivne potrošnje i proizvodnje vjetroelektrane, tj. ukoliko se proračun vrši samo na osnovi aproksimiranih krivulja trajanja distribucijske potrošnje i proizvodnje VE. U tom slučaju izračun je moguć na način da se formira fiktivna matrica  $[p_{distr\_VE}]^f$  direktno iz iznosa udjela pojedinog segmenta aproksimirane krivulje trajanja distribucijske potrošnje, odnosno proizvodnje vjetroelektrane:

$$[p_{distr\_VE}]^f = [p_{VE}]^T \cdot [p_{distr}]$$

gdje su:

- $[p_{VE}]_{(1,11)}$  – vektor koji sadrži jediničnu vrijednost vremenskog trajanja segmenata aproksimirane krivulje trajanja proizvodnje vjetroelektrane ( $t_j/8\ 760$ ),
- $[p_{distr}]_{(1,8)}$  – vektor koji sadrži jediničnu vrijednost vremenskog trajanja segmenata aproksimirane krivulje trajanja distribucijske potrošnje ( $t_i/8\ 760$ ).

Na takav način fiktivna matrica  $[p_{distr\_VE}]^f$  ima isto značenje kao i stvarna matrica  $[p_{distr\_VE}]$  i vrijedi:

$$\sum_{j=1}^{11} \sum_{i=1}^8 p_{distr\_VE}(j,i) = 1,$$

samo što vjerojatnosti pojave distribucijske potrošnje i proizvodnje vjetroelektrane ne odgovaraju stvarnim vrijednostima budući da nisu dobivene iz kronoloških krivulja.

Godišnji gubici radne energije izračunati preko matrice  $[p_{distr\_VE}]^f$ , na isti način kao i preko matrice  $[p_{distr\_VE}]$ , za promatranu distribucijsku mrežu iznose 2 050 MWh, što je u odnosu na točnu vrijednost od 2 038 MWh zanemariva razlika, neusporedivo manja od reda veličine nepouzdanosti ulaznih podataka. Također, čak i u točnom proračunu dobiveni rezultat je primjenjiv samo na godinu za koju raspoložemo s kronološkom krivuljom brzina vjetra

#### 4.4 Possibilities for further simplifying calculation

The method presented facilitates the precise calculation of the annual active energy losses in a distribution network to which a wind power plant is connected, in a manner that significantly reduces the required number of power flow calculations (from 8 760 to 88 in the example provided). However, it still takes considerable time and is impractical because it requires the annual chronological load duration curves and the annual chronological wind speed curves, i.e. annual chronological WPP generation curves, which are frequently not available. Therefore, the question may be asked how great a margin of error can be expected if the coincidence of the distribution consumption and the wind power plant generation are completely ignored, i.e. if the calculation is performed solely on the basis of the approximated distribution consumption duration and wind power plant generation curve. In this case, calculation is possible if a fictive matrix  $[p_{distr\_VE}]^f$  is directly formed from the percentage of an individual segment of an approximated curve of distribution consumption duration or wind power plant generation:

$$[p_{distr\_VE}]^f = [p_{VE}]^T \cdot [p_{distr}]$$

where:

- $[p_{VE}]_{(1,11)}$  – is a vector containing the p.u. values of the segment duration of an approximated generation duration curve ( $t_j/8\ 760$ ) for a wind power plant, and
- $[p_{distr}]_{(1,8)}$  – is a vector containing the p.u. values of the segment duration of an approximated distribution consumption duration curve ( $t_i/8\ 760$ ).

In this manner, the fictive matrix  $[p_{distr\_VE}]^f$  has the same significance as the actual matrix  $[p_{distr\_VE}]$ , and therefore

$$\sum_{j=1}^{11} \sum_{i=1}^8 p_{distr\_VE}(j,i) = 1,$$

except that the probabilities of the distribution consumption and wind power plant generation do not correspond to the actual values, since they are not obtained from chronological curves.

Annual active power losses calculated using the matrix  $[p_{distr\_VE}]^f$ , in the same manner as if using matrix  $[p_{distr\_VE}]$ , amount to 2 050 MWh for the distribution network considered. The difference between this value and the more precise value of 2 038 MWh is negligible. Furthermore, even with more precise calculation, the result obtained is only applicable for the year that a chronological wind speed curve

na lokaciji promatrane vjetroelektrane, što može značajno varirati iz godine u godinu.

Zbog toga se može zaključiti da je za praktične (i brze) izračune, sasvim dovoljna (čak i vrlo točna) metoda s fiktivnom matricom  $[p_{\text{distr\_VE}}]^T$ , bez obzira što je teoretski netočna. Jasno, ovisno o karakteristikama konkretne distribucijske mreže i distribuiranog izvora (mjesto priključenja, omjer nazivne snage distribuiranog izvora i vršnog opterećenja izvoda, omjer godišnje proizvodnje distribuiranog izvora i godišnje potrošnje na izvodu, režim rada distribuiranog izvora itd.), ipak je moguće očekivati i veće pogreške pri takvoj zanemarenosti.

## 5 ZAKLJUČAK

U ovom radu opisan je utjecaj priključka distribuiranog izvora električne energije na povećanje/smanjenje godišnjih gubitaka radne energije u distributivnoj mreži. Utjecajni faktori su brojni, a prvenstveno konfiguracija (topologija) distributivne mreže, njene tehničke karakteristike, vrsta distribuiranog izvora, odnosno režim rada, mjesto priključka na mrežu itd.

Uz teoretske osnove nužne za razumijevanje problema, razrađena je metodologija izračuna godišnjih gubitaka radne energije u distribucijskoj mreži na koju je priključena vjetroelektrana, što je ilustrirano na primjeru realne distribucijske mreže 30 kV i vjetroelektrane nazivne snage 9,9 MW. Metodologija zahtijeva poznavanje kronološke krivulje distribucijske potrošnje i kronološke krivulje brzina vjetra na lokaciji vjetroelektrane, što je nužan preduvjet za točan izračun gubitaka koji uvažava istodobnost potrošnje i proizvodnje. Iako je potreban broj proračuna tokova snaga reduciran na prihvatljiv broj, opisana metoda je ipak vremenski zahtjevnija i nepraktična ako nisu poznate navedene kronološke krivulje. Međutim, pokazano je da u slučaju potpunog zanemarivanja istodobnosti potrošnje i proizvodnje, pogreška u rezultatu može biti praktički zanemariva, tako da se proračun može znatno pojednostavniti korištenjem samo aproksimiranih krivulja trajanja potrošnje i proizvodnje.

Iako u promatranom primjeru priključak distribuiranog izvora smanjuje gubitke radne energije u SN mreži, to nikako ne može biti i generalni zaključak. Obrnuti efekt se može očekivati u slučaju većeg iznosa ukupno injektirane energije od strane distribuiranog izvora (što je u primjeru iznosilo oko 41 % ukupne distribucijske potrošnje).

is available for the location of the WPP site, which can significantly vary from year to year.

Therefore, it can be concluded that for practical and rapid calculations, the method with the fictive matrix  $[p_{\text{distr\_VE}}]^T$  is quite sufficient and even very precise, albeit theoretically imprecise. Depending on the characteristics of the specific distribution network and the distributed source (connection point, the ratio of the rated power of the power plant and the feeder peak load, the ratio of annual power plant generation and feeder consumption, the power plant operating regime etc.), a greater degree of error can clearly be anticipated from such simplified calculations than in the example presented.

## 5 CONCLUSION

In this article, the impact of a connected distributed energy source on increasing/decreasing annual active power losses in a distribution network is described. There are numerous influential factors, primarily the configuration (topology) of the distribution network, the technical characteristics thereof, types of the distributed source or power plant operation regime, connection point to the network etc.

In addition to the theoretical foundations essential for understanding the problem, a methodology has been developed for the calculation of annual active energy losses in a distribution network to which a wind power plant is connected, illustrated using the example of an existing 30 kV distribution network and a wind power plant with a rated power of 9,9 MW.

The methodology requires the chronological load distribution curve and the chronological wind speed curve at the site of the wind power plant, which are essential prerequisites for the precise calculations of losses that take the coincidence of consumption and generation into account. Although the necessary power flow calculations have been reduced to an acceptable number, the method described still requires considerable time and is impractical if the aforementioned chronological curves are not available. However, it has been shown that when the coincidence of consumption and generation are completely ignored, the error in the result can be practically negligible. Therefore, calculation can be significantly simplified by using only the approximated load and generation duration curves, without taking account of load and generation coincidence.

Although the connected distributed source reduced active energy losses in the medium-voltage network in the example presented, this result can in no way

Također, ne može se ni približno ocijeniti gdje bi bila granica pri kojoj je utjecaj priključka distribuiranog izvora neutralan s obzirom na godišnje gubitke radne energije u mreži, i to zbog brojnih utjecajnih parametara: topologija mreže, tehničke karakteristike mreže, mjesto priključka distribuiranog izvora, režim rada distribuiranog izvora u odnosu na distributivnu potrošnju itd.

be taken as a general conclusion. The opposite effect can be expected when a large amount of total energy is injected from a distributed source (which amounted to approximately 41 % of the total distribution consumption in the example presented).

Furthermore, it is not possible to make even an approximate determination of the point at which the impact of a connected distributed source would be neutral in relation to the annual active power losses in a network, due to a number of parameters: the topology of the network, the technical characteristics of the network, the site of the connection of the distributed source, the operation regime of the distributed source in relation to the distribution consumption etc.

---

## LITERATURA / REFERENCES

- [1] Solutions for the connection and operation of distributed generation, Technical report, EA Technology Ltd. & DTI, London, 2003
- [2] BEGOVIĆ, M. et al, Impact of Renewable Distributed Generation on Power Systems, Proc. of the 34th Hawaii International Conference on System Sciences, 2001
- [3] PAVIĆ, A., TRUPINIĆ, K., Gubici električne energije u distribucijskoj mreži, *Energija*, god. 56(2007), br. 2., 2007.
- [4] Network losses and distribution generation, Technical report, EA Technology Ltd. & DTI, London, 2006
- [5] GOIĆ, R., MUDNIĆ, E., JADRIJEV, Z., Primjena programskog paketa PowerCAD za analizu gubitaka snage i energije u distributivnim mrežama, V. savjetovanje HK CIGRE, Cavtat, 2001.
- [6] GOIĆ, R., MUDNIĆ, E., MILUN, D., Struktura gubitaka snage i energije u sredjenaponskoj distributivnoj mreži, IV. simpozij o elektrodistribucijskoj djelatnosti HK CIGRE, Pula, 2002.
- [7] GOIĆ, R., Utjecaj vjetrogeneratora na varijacije napona i gubitke snage u razdjelnoj mreži, V. simpozij o elektrodistribucijskoj djelatnosti HO CIGRE, Zadar, 2004.
- [8] RAKIĐIJA, T., Utjecaj rada vjetroelektrana na statičke varijacije napona i gubitke u distribucijskoj mreži, diplomski rad, FESB, 2005.

---

Uredništvo primilo rukopis:  
2007-11-26

Manuscript received on:  
2007-11-26

Prihvaćeno:  
2008-01-15

Accepted on:  
2008-01-15

# PRIMJENA MÖBIUSOVE VRPCE U ELEKTROTEHNICI APPLICATION OF THE MÖBIUS STRIP IN ELECTRICAL ENGINEERING

Dr. sc. Dušan Vujević,  
Cankarova 2 a,  
10000 Zagreb, Hrvatska

Jednostrana dvodimenzionalna površina nazvana Möbiusovom vrpcom osim u umjetnosti i ostalim granama tehnike rabi se i u elektrotehnici. Najčešće za izradu nisko omskih neinduktivnih otpornika, posebice u visokofrekvencijskim i impulsnim uređajima, zatim sustava kondenzatora u visokofrekvencijskim sklopovima, mikrovalnih rezonatora i filtara.

O tomu postoje četiri patenta prijavljena u SAD-u.

The one-sided two-dimensional surface known as the Möbius strip, in addition to applications in the arts and various branches of technology, is also used in electrical engineering, most frequently in the construction of low-ohm non-inductive resistors, particularly in high frequency and pulse devices, as well as capacitor systems in high frequency units and microwave resonators and filters, for which there are four registered patents in the United States.

**Ključne riječi: kondenzator, neinduktivni otpornik, rezonator**  
**Key words: capacitor, noninductive resistor, resonator**





## 1 UVOD

Njemački astronom i matematičar August Ferdinand Möbius (1790. – 1868.) uz Georga Friedricha Bernharda Riemanna (1826. – 1866.) smatra se jednim od njemačkih pionira neeuclidске geometrije i topologije. Topologija (grčki: *topos* – mjesto, *logos* – proučavanje) je, s više grana, dio čiste matematike, zapravo moderna geometrija, koja se bavi svojstvima objekata koja su sačuvana pri njihovoj deformaciji, uvrtanju i rastezanju, dok rezanje ili deranje nije dopušteno.

Tako je npr. kružnica topološki jednaka elipsi, a kugla elipsoidu, jer su potonji nastali rastezanjem kružnice odnosno kugle. Möbius je 1858. godine otkrio, a 1865. godine obznanio značajke jednostrane dvodimenzionalne površine nazvane po njemu Möbiusovom vrpcom (*Möbius strip*, *Möbius band*).

Te značajke je istovremeno, a po nekim autorima i nekoliko godina ranije, neovisno o Möbiusu, otkrio i njemački svestrani znanstvenik Johann Benedict Listing (1808. – 1882.), ali ga se u literaturi, s tim u svezi, rijetko spominje. Listing je, među ostalim, prvi upotrijebio izričaje topologija i mikron.

Sva trojica spomenutih znanstvenika bili su učenici i/ili suradnici velikog njemačkog matematičara, astronoma, geodeta, fizičara, topografa itd. Johanna Friedricha Carla Gausa (1777. – 1855.). Na tog velikana podsjeća nas više desetaka nazivlja s njegovim prezimenom iz područja matematike, fizike, astronomije itd. Spomenimo neka: zakon u elektrotehnici, teorem o divergenciji u vektorskoj analizi, stara jedinica za magnetsku indukciju, razdioba odnosno krivulja vjerojatnosti i krater na Mjesecu. Njegov se lik višekратно pojavljivao na poštanskim markama, nalazio se na novčanici od 10 DM itd.

Nije rijetkost da mnogi pronalasci na jednom području ljudske djelatnosti nakon više desetljeća ili čak stoljeća daju ideje za druge, na njima temeljenim, pronalascima iz sasvim drugih područja. To je slučaj i s Möbiusovom vrpcom, koja je prvotno bila zanimljiva samo matematičarima, a ovdje je opisana njezina primjena u elektrotehnici.

## 1 INTRODUCTION

The German astronomer and mathematician August Ferdinand Möbius (1790–1868) is considered one of the German pioneers of non-Euclidean geometry and topology, together with Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866). Topology (Greek: *topos* – place, *logos* – study) is, with several branches, a part of pure mathematics, actually modern geometry, engaged in the properties of objects that are retained during their deformation, twisting and stretching, while cutting or tearing are not permitted.

Thus, for example, a circle is topologically equal to an ellipse and a sphere is equal to an ellipsoid, since an ellipse occurs with the stretching of a circle and an ellipsoid with the stretching of a sphere. In 1858, Möbius discovered and in 1865 published the characteristics of a one-sided two-dimensional surface named after him, the Möbius strip or Möbius band.

According to some authors, at the same time or several years earlier, independently of Möbius, these characteristics had been discovered by the German all-around scientist Johann Benedict Listing (1808–1882), who is, however, less frequently mentioned in this context in the literature. Listing, among other things, was the first to use the terms topology and micron.

All three of the scientists mentioned were either students or associates of the great German mathematician, astronomer, geodesist, physicist and topographer Johann Friedrich Carl Gauss (1777–1855). We are reminded of this great man by more than ten terms using his surname from the fields of mathematics, physics, astronomy etc. We mention Gauss' law in electrical engineering, Gauss' theorem of divergence in vector analysis, the old Gauss unit for magnetic induction, Gauss distribution, i.e. the Gaussian probability distribution curve and a crater on the moon. His portrait has appeared many times on postage stamps and could be found on 10 DM bills etc.

It is not uncommon for many discoveries in one area of human activity to provide ideas for discoveries in other areas after many decades or even centuries. This is the case with the Möbius strip, which was initially only of interest to mathematicians but also has applications in electrical engineering, as described in this article.

## 2 MÖBIUSOVA VRPCA

Ako se jedan kraj, npr. pravokutne papirnate vrpce, zakrene uzduž dulje osi za pola okretaja, tj. za  $180^\circ$  i spoji s drugim krajem dobije se poseban oblik, s **jednom stranom i rubom**, tzv. Möbiusova vrpca ili petlja (slika 1). Da ima samo jednu stranu lako je dokazati bilo kojim pisalom. Ako se iz jedne točke, sredinom vrpce, pisalom započne crtati linija vratit će se u istu točku bez prijelaza preko ruba vrpce. Sličnim postupkom, npr. označavanjem markerom, može se dokazati da taj oblik ima samo jedan rub. Zanimljivo je, što će se dobiti ako se škarama reže uzduž središnje linije tog oblika, ili linijom povučenom trećinom širine vrpce.

Möbiusova vrpca ima široku primjenu. U starim industrijskim objektima snaga jednog pogonskog stroja prenosila se na više radnih strojeva kožnatim ili gumenim remenima. Ako je remen bio u obliku Möbiusove vrpce jednoliko su se trošile obje strane, dok se s običnim remenom trošila samo jedna njegova strana. Isto se tako magnetofonska vrpca u obliku Möbiusove vrpce rabila u uređajima za neprekinuto snimanje, jer se time postizalo dvostruko vrijeme registracije, odnosno reprodukcije.

## 2 THE MÖBIUS STRIP

If one end of a strip of paper is twisted along its length by a half turn, i.e. by  $180$  degrees, and connected to the other end, a special shape is obtained, with **one side and one edge**, the so-called Möbius strip or band (Figure 1). It is easy to demonstrate that it has only one side with any writing implement. If from one point in the center of the strip one starts to draw a line, it will return to the same point without crossing the edge of the strip. Through a similar approach, for example marking with a marker, it can be demonstrated that this form has only one edge. It is interesting what will be obtained if one cuts along the center of the line of this form, or along the line at a third of the width of the strip.

The Möbius strip has wide applications. In old industrial facilities, the power from a drive machine was transmitted to several other machines with leather or rubber belts. If the belt was in the shape of a Möbius strip, it would wear out evenly, while an ordinary belt would wear out on only one of its sides. Similarly, recording tapes in the shape of a Möbius strip are used in devices for uninterrupted recording because they provide double recording and playing times.



**Slika 1**  
Möbiusova vrpca  
(petlja)  
**Figure 1**  
Möbius strip  
(band)

Zakrene li se jedan kraj vrpce za dva poluokreta, tj. umjesto  $180^\circ$  za  $360^\circ$ , dobije se dvostrana dvorubna vrpca. Dakle, Möbiusova vrpca postiže se samo s **neparnim brojem poluzakretaja** jednoga kraja.

Veliki je broj primjena Möbiusove vrpce u kiparstvu, grafici i ostalim granama umjetnosti, tehnici itd., a nalazi se i na brazilskoj poštanskoj marki. Zanimljivo je, da se u časopisu Nature od 23.5.2002. godine spominje, da su pronađeni kri-

If one end of a strip is twisted  $360^\circ$  by two turns, instead of  $180^\circ$ , a double two-sided strip is obtained. Thus, a Möbius strip is only obtained with **an odd number of half twists** of one end.

There are a large number of applications of the Möbius strip in sculpture, graphics and other branches of art, technology etc., and one is pictured on a Brazilian postage stamp. It is interesting that the May 23, 2002 issue of the journal Nature mentions that crystals have been found of

stali nekih kemijskih spojeva u obliku te vrpce, što svakako nema veze sa samim Möbiusom.

Najpoznatija primjena Möbiusove vrpce je međunarodni znak za reciklažu, u obliku trokuta s tri strjelice (slika 2), koji se nalazi na odgovarajućoj ambalaži. Veliki broj tekstova o Möbiusovoj vrpici mogu se naći na internetu [1] i [2].

Valja napomenuti da se prezime Möbius u tekstovima na engleskom jeziku piše dvojako, kao Mobius i Moebius.

some chemical compounds in the form of this strip, which certainly has no connection whatsoever with Möbius.

The best known application of the Möbius strip is the international symbol for recycling, in the form of a triangle with three arrows (Figure 2), used on packaging materials. A large number of texts on the Möbius strip can be found on the Internet, for example [1] and [2].

It should be mentioned that the surname of Möbius can also be written as Mobius and Moebius in English texts.

**Slika 2**  
Međunarodni znak  
za reciklažu  
Figure 2  
International  
recycling symbol



### 3 PRIMJENA MÖBIUSOVE VRPCE U ELEKTROTEHNICI

Koliko je poznato, do danas je u SAD-u patentirano više naprava, uređaja i elemenata koji se temelje na načelu Möbiusove vrpce, među kojima su i tri električna elementa. I Teslin patent za namot elektromagneta iz 1894. godine također se pripisuje načelu Möbiusove vrpce.

#### 3.1 Möbiusov neinduktivni otpornik

Elementi električnih uređaja otpornici, kondenzatori i svitci, posebno oni precizni, trebaju imati što manje parazitskih sastavnica (komponenata). Zbog struje kroz otpornik nastaje unutar i izvan njega magnetsko polje, pa stoga otpornik ima određeni samoinduktivitet  $L$ , kojeg se može zamisliti u seriji s otporom  $R$ . Taj induktivitet dolazi do izražaja već pri niskim frekvencijama. Između zavoja, kao i između različitih dijelova otpornika i susjednih metalnih predmeta postoji mnoštvo kapaciteta malih vrijednosti, koje se može nadomjestiti jednim

### 3 APPLICATION OF THE MÖBIUS STRIP IN ELECTRICAL ENGINEERING

Several devices and elements based upon the Möbius strip have been patented in the United States, including three electrical elements. Tesla's 1894 patent for a coil for electromagnets is also attributed to the principle of the Möbius strip.

#### 3.1 The Möbius noninductive resistor

The elements of electrical devices such as resistors, capacitors and coils, particularly those which are more precise, should have as few parasitic components as possible. Due to current passing through a resistor, a magnetic field is formed on the inside and outside, and thus the resistor has a certain self-inductance  $L$ , which we can imagine in a series with resistance  $R$ . This inductance is already evident at low frequencies. Between the turns, as well as between various parts of a resistor and neighboring metal objects, there are many low value capacitances, which can be substi-

kapacitetom  $C$  između početka i kraja otpornika. Vlastiti induktivitet i kapacitet otpornika izazvati će u strujnom krugu fazni pomak:

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \omega \left[ \frac{L}{R} (1 - \omega^2 LC) - RC \right] = \omega \tau \quad (1)$$

između struje i napona, pa će otpornik, posebice kod viših frekvencija, djelovati kao impedancija. Stoga se posebnim načinima izrade preciznih otpornika nastoji smanjiti vlastiti induktivitet i kapacitet, jer se oni ne mogu potpuno otkloniti. Međutim, međusobno se mogu tako uskladiti da cijeli otpornik djeluje u strujnom krugu kao djelatni otpor. Kakvoća otpornika za izmjeničnu struju, pri kružnoj frekvenciji  $\omega = 2\pi f$  s obzirom na parazitske sastavnice, iskazuje se vremenskom stalnicom (konstantom)  $\tau$  [3]:

$$\tau = \frac{L}{R} (1 - \omega^2 LC) - RC. \quad (2)$$

Za frekvencije do 20 kHz je  $\omega^2 LC \ll 1$ , pa se ovaj izraz može pojednostaviti u:

$$\tau \approx \frac{L}{R} - RC. \quad (3)$$

Ako se postigne da je  $L/R = RC$ , vremenska stalnica bit će jednaka ničtici, pa otpornik, unatoč samoinduktivitetu i parazitskom kapacitetu, djeluje kao djelatni otpor.

Bez posebnih mjera, kod otpornika velikih otpora prevladava utjecaj parazitskih kapaciteta, a kod malih otpora utjecaj induktiviteta. Stoga se pri izradi niskoomskih otpornika posebnim zahvatima, npr. načinima namatanja, nastoji smanjiti njihov samoinduktivitet. Žičani otpornici otpora reda veličine 100  $\Omega$  ili manji najčešće se izrađuju bifilarno ili namataju prema Ayrton-Perryu, a većeg otpora prema Chaperonu itd. [3]. Kvalitetni otpornici imaju vremensku stalnicu reda veličine 10 nanosekundi.

Richard L. Davies iz Sandia Laboratories (SAD) patentirao je 16.8.1966. godine [4] neinduktivni električni otpornik, pretežito nisko omski, posebice za primjenu u visokofrekvencijskim i impulsnim

tuted by the equivalent capacitance  $C$  between the beginning and the end of the resistor. The self inductance and capacitance of a resistor causes a phase shift between the current and the voltage in a circuit:

Thus, the resistor behaves as an impedance, especially at higher frequencies. Therefore, high-precision resistors are constructed in a specific manner in order to reduce self-inductance and capacitance, since they cannot be completely eliminated. However, they can be matched so that the whole resistor acts as an active resistor in a circuit. The quality of a resistor in an alternating current circuit in respect to its parasitic components at the angular frequency  $\omega = 2\pi f$  is expressed by the time constant  $\tau$  [1]:

For frequencies of up to 20 kHz,  $\omega^2 LC \ll 1$  and therefore this expression can be simplified as follows:

If  $L/R = RC$ , the time constant will be zero, so the resistor, despite self-inductance and parasitic capacitance, will act as an active resistor.

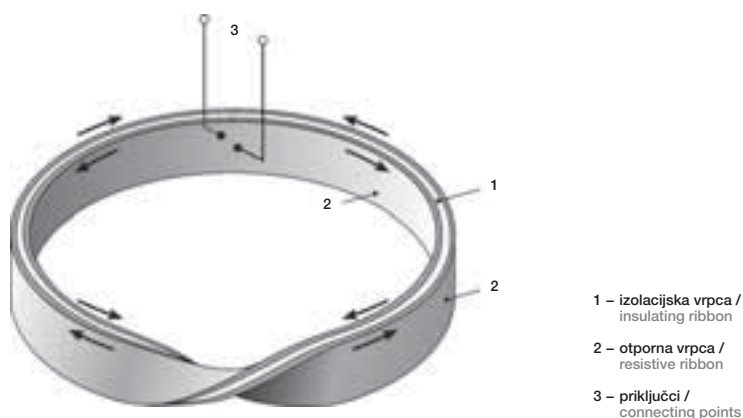
Without special measures, in high value resistors the impact of parasitic capacitances is dominant, while in low value resistors the inductive impact is dominant. Therefore, when devising resistors of low resistance value using specialized procedures, for example winding procedures, attempts are made to reduce their self-inductance. Wire resistors of 100  $\Omega$  or lower are most often made with bifilar windings according to Ayrton-Perry and of greater resistance according to Chaperon etc. [3]. High quality resistors have a time constant of an order of magnitude of 10 nanoseconds.

On August 16, 1966, Richard L. Davies of Sandia Laboratories (United States) [4] patented a noninductive electrical resistor, predominantly low ohmic, particularly for applications in high frequency and

elektroničkim sklopovima, npr. u tadašnjim radarima, koji su radili na frekvencijama do nekoliko gigaherca. Otpornik se sastoji od dvije vrpce prikladnog otpornog materijala, iste duljine i širine, učvršćene na suprotnim stranama jedne izolacijske vrpce. Jedni krajevi te kombinacije zakrenu se za 180° i spoje s drugim krajevima, tj. oblikuje se Möbiusova vrpca (slika 3). Krajevi otpornih vrpca spoje se lemljenjem. Umjesto vrpce može se rabiti izolirana otporna žica, npr. manganinska. Priključci na otporničke vrpce, što je od posebne važnosti, moraju biti točno jedan nasuprot drugome. U suprotnome otpornik ima induktivnu sastavnicu koja je najveća kada su priključci razmaknuti za polovicu duljine petlje. Struje, odnosno impulsi u sklopovima, od priključka teku otpornim vrpčama u suprotnim pravcima, tako da se njihova elektromagnetska polja poništavaju, pa se dobije neinduktivni otpornik vrlo male vremenske stalnice. Jedna i druga vrpca zapravo su paralelno spojene. Poprečni presjek otpornika pokazuje da je to kondenzator, pa postoji određena kapacitivna sastavnica.

pulse electronic circuits, for example in the radar installations of the time, which operated at frequencies of up to several GHz. The resistor consists of two ribbons of a suitable resistive material of the same length and width, affixed on opposite ends of a strip of dielectric. One end of this assembly is twisted 180° and is joined to the other end, i.e. a Möbius strip is formed (Figure 3). The ends of the resistive ribbons are soldered together. Instead of ribbons, it is possible to use resistive wire, e.g., Manganin. The connection points on resistive ribbons must be precisely one opposite the other, which is of particular importance. Otherwise, the resistor would have an inductive component which is greatest when the distance between the connection points is half the loop length. Currents or pulses flow through the resistive ribbons in opposite directions, so that their electromagnetic fields cancel each other. Thus, a non-inductive resistor with a very small time constant is obtained. Actually, the ribbons are connected in parallel. A cross-sectional view reveals that it is a capacitor, and there is a certain capacitive component.

**Slika 3**  
Möbiusov otpornik  
Figure 3  
Möbius resistor



Eksperimentalni primjerci takvih otpornika, otpora reda veličine 10 Ω, imali su induktivitete reda veličine 10 nH i kapacitete reda 0,1 pF, dakle vremenske stalnice reda veličine nanosekunde. Vrijeme porasta impulsa, tj. vrijeme potrebno da impuls od 10 % dostigne razinu od 90 % svoje konačne vrijednosti, kod 1 kV, bilo je oko 0,1 μs.

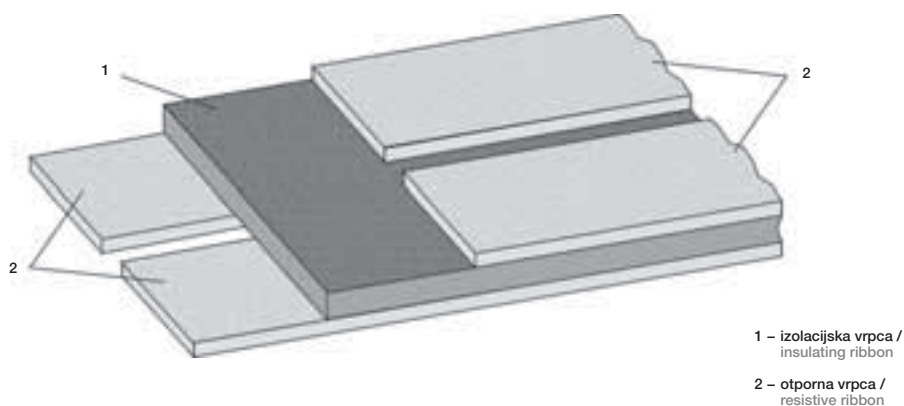
Na jednoj izolacijskoj vrpici mogu se načiniti dva ili više takvih otpornih elemenata, s međusobim razmacima od oko 2 mm, koji se mogu, po želji, spajati serijski ili paralelno (slika 4). Sastavnice takvog sustava nemaju međusobnog utjecaja, kao niti utjecaja bliskih metalnih objekata i vanjskih polja. Značajke Möbiusovog otpornika ne mijenjaju se njegovom duljinom ili oblikom. To znači da se

Experimental samples of such resistors, of an order of magnitude of 10 ohms, had inductances of an order of magnitude of 10 nH and capacitances of an order of magnitude of 0,1 pF, and thus a time constant of an order of magnitude of a nanosecond. The pulse rise time, i.e., the time necessary for a pulse to increase from 10 % to 90 % of its peak value, was approximately 0,1 μs at 1 kV.

One or more such resistive elements can be applied to an insulating ribbon with approximately 2 mm spacings. Resistive elements can be connected in series or in parallel (Figure 4). The components of such a system do not affect each other and do not couple electromagnetically to other metallic objects. The characteristics of a Möbius resistor do not change with

Möbiusov otpornik može omotati oko valjkastog tijela ili tanke kartice, pa čak ga oblikovati u kuglu.

its length or form. This means that a Möbius resistor can be wound around a cylindrical core or a thin card, and can even be formed into a ball.



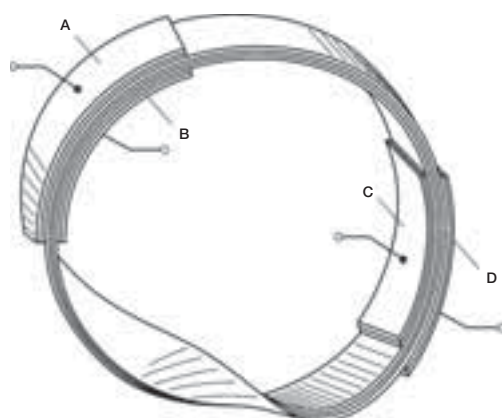
**Slika 4**  
Möbiusov  
višestruki otpornik  
Figure 4  
Möbius combined  
resistor

### 3.2 Möbiusov kondenzator

Dvadeset godina nakon patenta za neinduktivni Möbiusov otpornik, na njegovoj je osnovi Thomas J. Brown patentirao 8.7.1986. godine Möbiusov kondenzator [5]. Jednostavno je na, prije spomenute otporne vrpce, ili općenito vrpce od vodljiva materijala Möbiusova otpornika, stavio izolacijske slojeve i na njima vodljive vrpce, tako da su te kombinacije kraće od vrpce samog otpornika i nalaze se jedna nasuprot druge (slika 5). Vodičima se na vanjskim vodljivim vrpćama (A,B,C i D) priključuju u električni krug. Mogu biti jedan ili dva para takvih kondenzatora uzduž opsega ovog složenog sustava. Oni imaju ukupno sedam vrpca, izolacijskih i vodljivih. Duljinom i širinom vrpca, te debljinom izolacije, mogu se ugađati vrijednosti kapaciteta.

### 3.2 Möbius capacitor

Twenty years after the patent was issued for the non-inductive Möbius resistor, Thomas J. Brown patented the Möbius capacitor on July 8, 1986 [5]. On top of the previously mentioned resistive ribbons or, generally, the ribbon conductors of a Möbius resistor, he simply layered a dielectric material and then layered this with ribbon conductors, so that these combinations are shorter than the ribbons of the resistor and located one opposite the other (Figure 5). These combinations are connected to an electric circuit via leads attached to the outside ribbon conductors (A, B, C and D). There can be one or two capacitive enclosures along the circumference of this complex system. They have a total of seven ribbons, dielectric and conductive. The capacitance can be adjusted by changing the length and width of the ribbons and the dielectric thickness.



A, B, C, D – vanjski oblozi /  
outer plates

**Slika 5**  
Möbiusov  
kondenzator  
Figure 5  
Möbius capacitor

Budući da je Möbiusovom kondenzatoru osnovica Möbiusov otpornik, za kojeg je spomenuto da ima kapacitivnu sastavnicu, razmotrit ćemo što se događa kad se na priključnice 3 otpornika (slika 3) priključi izmjenični napon  $u$  tjemene vrijednosti  $U_m$ . Neka je  $l$  duljina Möbiusova otpornika (kada se petlja prereže),  $c$  brzina širenja vala električnog polja između priključnica  $3_1$  i  $3_2$  otpornika i vrijeme  $T=l/c$  putovanja vala između  $3_1$  i  $3_2$ . Ako je frekvencija priključenog napona  $f$  bit će, u vremenu  $t$ , potencijal priključnice  $3_1$ :

$$U_{3_1} = U_m \sin 2\pi ft, \quad (4)$$

a priključnice  $3_2$ :

$$U_{3_2} = U_m \sin 2\pi f \left( t + \frac{l}{c} \right), \quad (5)$$

Napon na priključnicama 3 je jednak razlici potencijala priključnica  $3_1$  i  $3_2$ :

$$u = U_m \sin 2\pi ft - U_m \sin 2\pi f \left( t + \frac{l}{c} \right). \quad (6)$$

Otpornik će djelovati kao kondenzator kapaciteta  $C$ , pa je između priključnica 3 kapacitivna struja  $i_c=C(du/dt)$ . Derivacijom po vremenu  $t$  jednadžbe (6) i uvrštenjem  $f=c/l$ , dobiva se  $i_c=0$ . Stoga će priključivanjem Möbiusova otpornika u električni sklop, pri visokim frekvencijama, kada su valne duljine jednake ili blizu duljini petlje, ili njihovim cjelobrojnim višekratnicima, on propuštati rezonantnu frekvenciju i njezine harmonike, a prigušiti ostale frekvencije. Möbiusovi sustavi kondenzatora mogu, prema tvrdnji autora patenta, služiti za više svrha, među ostalim za filtriranje pravokutnih i pilastih valnih oblika, ispitivanje jednakosti i istofaznosti dvaju signala itd.

### 3.3 Möbiusov rezonator i filter

Pri vrlo visokim frekvencijama, kada su duljine vala reda veličine desetak centimetara ili manje, zbog velikih gubitaka, umjesto vodiča u obliku žica elektromagnetski valovi prostiru se valovodima. To su metalne ili dielektrične, ali i mješovite,

Since the Möbius capacitor employs the principle of the Möbius resistor, which as previously mentioned has a capacitive component, we shall discuss what will happen when an alternating voltage  $u$  with a peak value  $U_m$  is applied between the connection points of the resistor according to Figure 3. Let  $l$  represent the length of the Möbius resistor (when the loop is cut), the propagation speed of the electric field wave between connection points  $3_1$  and  $3_2$  of the resistor, and  $T=l/c$  the wave propagation time between  $3_1$  and  $3_2$ . If  $f$  is the frequency of the applied voltage, then in time  $t$ , the potential of the connection point  $3_1$  is as follows:

and of the connection point  $3_2$ :

The voltage at 3 is equal to the potential difference between  $3_1$  and  $3_2$ :

The resistor will act as a capacitor of the capacitance  $C$ . Thus, current  $i_c=C(du/dt)$  flows between connection points  $3_1$  and  $3_2$ . The derivative of equation (6) with respect to time  $t$  and for  $f=c/l$ , is  $i_c=0$ . Therefore, when a Möbius resistor is placed in a high frequency electrical circuit, when the wavelengths are equal to or approximately the length of the loop or their integer multiples, it passes the resonant frequency and its harmonics and attenuates other frequencies. Möbius capacitors can, according to the inventor, serve many purposes, including the filtering of square and sawtooth waveforms, testing whether two signals are equal and in-phase etc.

### 3.3 Möbius resonator and filter

At very high frequencies, when the wavelength is of an order of magnitude of ten centimeters or less, due to high losses, instead of a conductor in the form of a wire, electromagnetic waves propagate in waveguides. These are metallic or dielectric, but also tubes of various cross-sectional dimensions [6]



cijevi različitih izmjera presjeka [6] i [7]. Presjeci valovoda, iz praktičnih su razloga pravokutni ili kružni. Izmjere valovoda ovise o frekvenciji. Čim je frekvencija niža, izmjere su valovoda veće. Energija se širi medijem unutar valovoda, refleksijama od zida do zida, a samo njezin manji dio ulazi u zidove i gubi se u obliku topline. Podjela valovoda temelji se na longitudinalnoj sastavnici polja usmjerenoj dužoj osi Z. Ako nema električnog polja u smjeru propagacije vala tada on nosi oznaku TE (transverzalni električni val), a onaj koji nema magnetskog polja u smjeru propagacije naziva se TM (transverzalni magnetski val). Jedan od poznatijih dielektričkih valovoda je svjetlovod, koji je danas u opsežnoj uporabi.

Valovod potpuno zatvoren sa svih strana, ispunjen dielektrikom sa zanemarivim gubicima i savršeno vodljivih zidova, ima svojstva elektromagnetskog rezonatora.

Jeffrey M. Pond patentirao je 3.9.2002. godine Möbiusov rezonator i filter [8]. Rezonator čini pravokutni valovod čiji je jedan kraj zakrenut uzduž osi za 180° i spojen s drugim krajem. To zakretanje dovodi do dodatnog faznog pomaka elektromagnetskog vala u valovodu što olakšava uvjete rezonancije u malom obujmu. Filtri mogu biti niskopropusni, visokopropusni i pojasnopropusni. Niskopropusni filtri propuštaju sve frekvencije od nulte do određene gornje granične frekvencije, a druge prigušuju. Visokopropusni filtri propuštaju sve frekvencije više od donje granične frekvencije, a pojasnopropusni propuštaju sve frekvencije između donje i gornje granične frekvencije. Filtri su građeni od kombinacija induktiviteta i kapaciteta. Mikrovalni filtri, osim onih načinjenih od prijenosnih linija, uključuju jedan ili više spojenih rezonatora s nizom dijafragmi (prozora) u valovodu koji djeluju kao induktivni ili kapacitivni elementi, kako bi se ostvarilo željeno frekvencijsko razdvajanje.

### 3.4 Namot elektromagneta

Nikola Tesla je 9.1.1894., kao svoj 56. patent u 18 godina, patentirao namot za elektromagnet [9]. U ovom patentu navodi da takvi svitci imaju zbog samoinduktiviteta značajnu jalovu sastavnicu, koja se može kompenzirati prikladnim kondenzatorima. Kako bi se izbjegla uporaba, u ono doba skupih i glomaznih kondenzatora, Tesla predlaže svoj svitak koji ne bi imao induktivnu sastavnicu, jer bi bila kompenzirana kapacitetom samoga svitka za određenu frekvenciju i napon. Inovacija se, prikazana načelnim primjerom, sastoji u tome da je zavojnica bifilarna, tj. paralelno se namataju dva izolirana vodiča A i B (slika 6). Kraj vodiča B spaja se na početak vodiča A. Razlika potencijala

and [7]. Waveguide cross sections are rectangular or circular for a practical reason. Waveguide dimensions depend on frequency. When the frequency is lower, waveguide dimensions are higher. Energy propagates through a medium in waveguides and is reflected from wall to wall. Only a small amount enters the walls and is lost in the form of heat. The classification of waveguides is based upon the longitudinal field component along axis Z. If there is no electric field in the direction of the propagation of the wave, it is designated as the transverse electric wave (TE), and if there is no magnetic field in the direction of the propagation of the wave, it is designated as the transverse magnetic wave (TM). One of the better known dielectric waveguides is an optical waveguide, which is widely used today.

A waveguide that is completely closed on all sides, filled with dielectric, with negligible losses and ideally conducting walls, has the properties of an electromagnetic resonator.

On September 3, 2002, Jeffrey M. Pond patented the Möbius resonator and filter [8]. The resonator consists of a rectangular waveguide, one end of which is twisted along its axis and connected to the other end. This twist provides additional phase shift of the electromagnetic wave in the waveguide, which facilitates a resonant condition in a smaller volume. Filters can be low-pass, band-pass or high-pass. Low-pass filters allow all frequencies from zero up to a cutoff frequency to pass through, and attenuate others. High-pass filters let through all frequencies higher than a low cutoff frequency, and band-pass filters let through all frequencies between the lower and upper cutoff frequencies. The filters consist of a combination of inductive and capacitive components. Microwave filters, with the exception of those consisting of transmission lines, include one or more connected resonators with low diaphragms (windows) in the waveguide that serve as inductive or capacitive elements, in order to achieve the desired frequency separation.

### 3.4 Coil for electromagnets

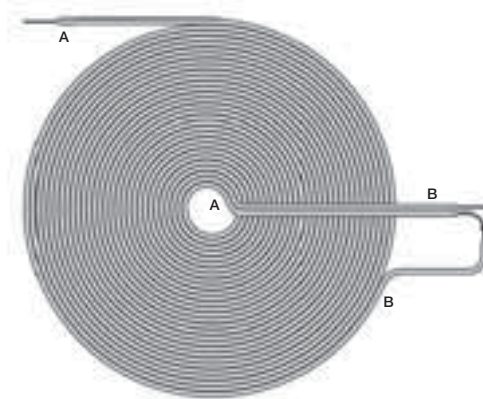
On January 9, 1894, Nikola Tesla obtained his 56<sup>th</sup> patent in 18 years, a coil for electromagnets [9]. In this patent, it is stated that such coils have a significant reactive component due self-inductance, which can be compensated by suitable capacitors. In order to avoid the use of capacitors, which at the time were expensive and cumbersome, Tesla proposed a coil that would not have an inductive component, since it would be compensated for specific frequency and voltage by the capacity of the coil. The innovation, presented with a general example, consists of the fact that the coil is bifilar, i.e. with two insulated conductors A and B wound in parallel (Figure 6). The

između bilo kojih susjednih točaka tih dvaju vodiča u zavojnici jednaka je polovici priključenog napon na svitke. Kod obične zavojnice razlika potencijala između dviju susjednih točaka dvaju zavoja jednaka je naponu priključenom na zavojnicu podijeljenom s ukupnim brojem zavoja. Zbog tijesno namotanih vodiča odijeljenih relativno tankom izolacijom, kapaciteti su veliki. Energija pohranjena u takvom kondenzatoru razmjerna je kvadratu razlike potencijala između obloga.

end of conductor B is connected to the starting point of conductor A. The potential difference between any neighboring points of these two conductors in the coil is equal to half the applied voltage to the coil. With ordinary coils, the potential difference between two contiguous points is equal to the applied voltage to the coil divided by the total number of turns (convolutions). Due to the tightly wound conductors, separated by relatively thin insulation, the capacities are high. The energy stored in such a capacitor is proportional to the square of the potential difference between adjacent turns.

**Slika 6**

Načelo izrade namota elektromagneta  
Figure 6  
Coil for electromagnets



Kako je razlika potencijala višestruko veća nego u običnoj zavojnici pa je i kompenzacija samoinduktiviteta razmjerno veća. Kompenzacija na ovaj način je pogodnija, jer su kapaciteti ravnomjerno raspoređeni. Ovisno o namjeni, svitci se mogu različito namatati i pritom postići željenu kompenzaciju.

Since the difference in potential is many times greater than in an ordinary coil, the compensation of the self-inductance is proportionally greater. Compensation is, thereby, improved because the capacities are evenly distributed. Depending upon the intended purpose, the coils can be wound in various ways in order to obtain the desired compensation.

## 4 ZAKLJUČAK

Nizu postupaka u izvedbi pasivnih dijelova električnih sklopova sa smanjenim parazitskim sastavnicama, od kojih su neki znani s kraja 19. stoljeća, pridružili su se novi. Suvremene izvedbe otpornika za visoke frekvencije, kao što su one u tehničarima tankog filma, sendvič itd., većinom su prikladne za otpore većih od 10  $\Omega$  i relativno malih snaga.

Opisani Möbiusovi otpornici, prema svojoj izvedbi, čini se da su prikladni za male otpore i veće snage pri visokim frekvencijama. Jedna je od prednosti ovih otpornika i kondenzatora što se mogu različito oblikovati. Gotove vrpce otpornika i sustava kondenzatora mogu se omotati oko tijela različitih oblika, ili čak ih oblikovati u kugle, a da pritom nema međusobnih utjecaja pojedinih njihovih dijelova, ili utjecaja okolnih predmeta.

## 4 CONCLUSION

Procedures for devising electric circuit components with reduced parasitic components, some of which have been known since the end of the 19<sup>th</sup> century, are being joined by new ones. The majority of modern high frequency resistors, such as thin-film, sandwich etc., are suitable for resistance of greater than 10  $\Omega$  and relatively low power.

The Möbius resistors described appear to be more suitable for low resistance and high power at high frequencies, due to their construction. One of the advantages of these resistors and capacitors is that they can be shaped in various ways. Finished resistor strips and capacitor systems can be wound around objects of a variety shapes or even formed into a sphere, without the components being affected by each other or coupled to surrounding objects.

---

## LITERATURA / REFERENCES

- [1] <http://www.math.unh.edu>
- [2] <http://scdiv.bcc.ctc.edu>
- [3] BEGO, V.: Mjerenja u elektrotehnici, Graphis, Zagreb, 2003.
- [4] DAVIS, R.D., Non-inductive electric resistor, US Patent 3 267 406
- [5] BROWN, T.J., Mobius capacitor, US Patent 4 599 586
- [6] BOSANAC, T., Teoretska elektrotehnika 1, Tehnička knjiga, Zagreb, 1970.
- [7] SMRKIĆ, Z., Mikrovalna elektronika, Školska knjiga, Zagreb, 1986.
- [8] POND, J.M., Mobius resonator and filter, US Patent 6 445 264
- [9] TESLA, N., Coil for electro-magnets, US Patent 512 340

---

Uredništvo primilo rukopis:  
2007-10-22

Manuscript received:  
2007-10-22

Prihvaćeno:  
2007-11-28

Accepted:  
2007-11-28

# 3D PRORAČUN KVAZISTATIČKOG MAGNETSKOG POLJA OKO VODIČA I FEROMAGNETSKE PLOČE INTEGRALNIM JEDNADŽBAMA THE 3D CALCULATION OF THE QUASISTATIC MAGNETIC FIELD AROUND A CURRENT CARRYING CONDUCTOR AND FERROMAGNETIC PLATE BY MEANS OF INTEGRAL EQUATIONS

Mr. sc. Branimir Ćucić, Končar – Distributivni i specijalni transformatori,  
Mokrovićeva 8, 10090 Zagreb, Hrvatska

Za model vodiča i feromagnetske ploče napravljen je 3D proračun magnetskog polja pomoću integralnih jednadžbi za kvazistatički slučaj. Uspoređeni rezultati proračuna i mjerenja dobro se slažu.

Pristup preko integralnih jednadžbi pokazuje se vrlo efikasnim u prostoru u kojem se traži polje daleko od izvora i u kojem nema puno različitih feromagnetskih materijala. Pri tome se pretpostavlja da su vodljivost i permeabilnost feromagnetskog materijala konstantni.

Također je prikazan utjecaj feromagnetskog materijala na magnetsko polje vodiča.

The 3D calculation of the magnetic field around a model of a current carrying conductor and ferromagnetic plate has been performed by means of integral equations in the quasistatic case. There is good agreement between the calculated and measured results. The integral equation approach is very effective in a space in which a field distant from the source is calculated and there are not many different types of ferromagnetic materials. The conductivity and permeability of the ferromagnetic materials are assumed to be constant. Furthermore, the influence of the ferromagnetic materials on the magnetic field of a conductor is shown.

**Ključne riječi:** 3D proračun, feromagnetski materijal, integralne jednadžbe, kvazistatičko magnetsko polje

**Key words:** 3D calculation, ferromagnetic material, integral equations, quasistatic magnetic field



## 1 UVOD

Pri numeričkom proračunu magnetskog polja metodom konačnih elemenata u prostoru u kojem se traži polje daleko od izvora, može se pojaviti problem vrlo velikog broja potrebnih elemenata za modeliranje kao i problem definiranja rubnih uvjeta na granici domene proračuna. Nasuprot tome u pristupu preko integralnih jednadžbi potrebno je modelirati samo feromagnetske materijale i ne treba postavljati rubne uvjete, jer je domena proračuna beskonačna. čitav se prostor promatra kao slobodni ( $\mu=\mu_0$ ) u kojem postoje primarni izvori (stvarni izvori) i sekundarni izvori (izvori koji modeliraju materijal).

Prikazat će se 3D proračun magnetskog polja preko integralnih jednadžbi na najjednostavnijem modelu; tanki vodič kroz koji teče struja, a u čijoj se blizini nalazi feromagnetska ploča u obliku kvadra.

## 2 MODEL ZA 3D PRORAČUN

Na slici 1 prikazan je ispitivani model, a na slici 2 pojednostavljeni model za proračun u kojem su zanemareni progib i promjer vodiča.

Struja  $I_0$  frekvencije  $f$  teče kroz vodič duljine  $l$  u smjeru  $+x$  osi. Ispod vodiča simetrično je postavljena feromagnetska ploča stalne specifične vodljivosti  $\gamma$  i stalne permeabilnosti  $\mu$ . Ishodište koordinatnog sustava se postavlja u središte vodiča prema slikama 1 i 2.

Zanemaruje se utjecaj svih ostalih izvora i materijala na polje promatranog vodiča osim same feromagnetske ploče. Polje će se računati samo u smjeru osi  $z$ .

## 1 INTRODUCTION

In the numerical calculation of a magnetic field by means of the commonly used finite element method in a space in which a field distant from the source is being sought, problems in connection with the very large number of elements required for modeling and the definition of boundary conditions may arise. However, when using integral equations, only the ferromagnetic materials need to be modeled and it is not necessary to set boundary conditions, since the domain is infinite. All the space in which the primary (real sources) and secondary sources exist is regarded as free ( $\mu=\mu_0$ ).

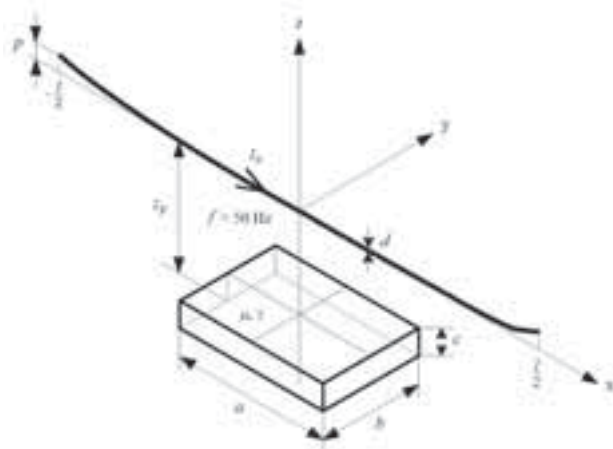
The 3D calculation of a magnetic field by means of integral equations will be shown for the simplest model; a current carrying conductor and nearby ferromagnetic cuboid plate.

## 2 MODEL FOR 3D CALCULATION

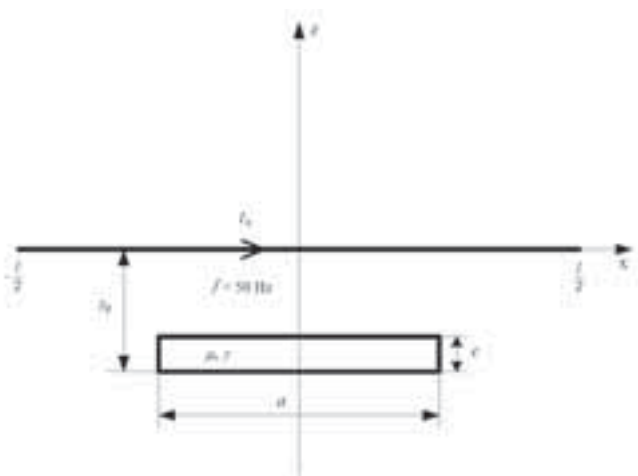
The model studied is shown in Figure 1, while a simplified model for calculation is shown in Figure 2, in which the deflection and diameter of the conductor are ignored.

Current  $I_0$  of frequency  $f$  flows through the conductor of length  $l$  in the direction of the  $+x$  axis. A ferromagnetic plate is placed symmetrically beneath the conductor. The plate has constant conductivity  $\gamma$  and constant permeability  $\mu$ . The origin of the coordinate system is in the center of the conductor, according to Figures 1 and 2.

The influence of other sources and materials (except the ferromagnetic plate) on the magnetic field of the conductor is ignored. The field will only be calculated along the  $z$  axis.



**Slika 1**  
Ispitivani model vodiča i feromagnetske ploče  
**Figure 1**  
Studied model of a conductor and ferromagnetic plate



**Slika 2**  
Pojednostavljeni model za proračun magnetskog polja  
**Figure 2**  
Simplified model for magnetic field calculation

$I_0$  – efektivna vrijednost struje koja teče kroz vodič,  
 $f$  – frekvencija,  
 $l$  – duljina vodiča,  
 $p$  – progib vodiča,  
 $d$  – promjer vodiča,  
 $a$  – duljina feromagnetske ploče u smjeru x-osi,  
 $b$  – duljina feromagnetske ploče u smjeru y-osi,  
 $c$  – duljina feromagnetske ploče u smjeru z-osi,  
 $z_p$  – z koordinata donje plohe feromagnetske ploče,  
 $\gamma$  – vodljivost feromagnetske ploče,  
 $\mu$  – permeabilnost feromagnetske ploče ( $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ ),  
 $\mu_0$  – permeabilnost zraka ( $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6}$  H/m).

Zbog kvazistatičnosti polja ( $f = 50$  Hz), proračun će se provesti u kompleksnom području pa će sve vremenski ovisne veličine imati točku iznad naziva (fazor). Ako veličina ima i vektorski karakter, onda će **naziv** biti **podebljan (bold)** (npr.  $\vec{H}$ ).

$I_0$  – effective value of current flowing through conductor,  
 $f$  – frequency,  
 $l$  – length of conductor,  
 $p$  – deflection of conductor,  
 $d$  – diameter of conductor,  
 $a$  – length of the ferromagnetic plate in the x-axis direction,  
 $b$  – length of the ferromagnetic plate in the y-axis direction,  
 $c$  – length of the ferromagnetic plate in the z-axis direction,  
 $z_p$  – z-coordinate of the bottom surface of the ferromagnetic plate,  
 $\gamma$  – conductivity of the ferromagnetic plate,  
 $\mu$  – permeability of the ferromagnetic plate ( $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ )  
 $\mu_0$  – permeability of the air ( $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6}$  H/m)

Because the field is quasistatic ( $f = 50$  Hz), the calculation will be performed in a complex plane so that all time-dependent variables will have a point above the symbol (phasor). If the variable is a vector, it will have a **bold** symbol (e.g.  $\vec{H}$ ).

### 3 PRORAČUN MAGNETSKOG POLJA VODIČA (BEZ FEROMAGNETSKE PLOČE)

Dogovorno će sve veličine koje uzrokuje primarni izvor (vodič)  $I_0$  imati indeks 0. Vektorski magnetski potencijal  $A_0$  i jakost magnetskog polja  $H_0$  proračunat će se prema Biot-Savartovu zakonu. Budući da struja u vodiču teče samo u smjeru +x osi, u promatranoj točki prostora vektorski magnetski potencijal imat će samo x komponentu, a jakost magnetskog polja y i z komponentu.

Vektorski magnetski potencijal i jakost magnetskog polja u bilo kojoj točki (x,y,z) dani su sljedećim izrazima:

$$\dot{A} = \dot{A}_{0x} \cdot \mathbf{a}_x = \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \ln \left( \frac{x + \frac{l}{2} + \sqrt{\left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + y^2 + z^2}}{x - \frac{l}{2} + \sqrt{\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + y^2 + z^2}} \right) \cdot \mathbf{a}_x \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_0 &= \dot{H}_{0y} \cdot \mathbf{a}_y + \dot{H}_{0z} \cdot \mathbf{a}_z = \\ &= \frac{-z \cdot \dot{I}_0}{4\pi \cdot (y^2 + z^2)} \left( \frac{x + \frac{l}{2}}{\sqrt{\left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{x - \frac{l}{2}}{\sqrt{\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + y^2 + z^2}} \right) \cdot \mathbf{a}_y + \\ &+ \frac{y \cdot \dot{I}_0}{4\pi \cdot (y^2 + z^2)} \left( \frac{x + \frac{l}{2}}{\sqrt{\left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{x - \frac{l}{2}}{\sqrt{\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + y^2 + z^2}} \right) \cdot \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (2)$$

### 3 CALCULATION OF $A_0$ AND $H_0$ FOR A CONDUCTOR (WITHOUT A FERROMAGNETIC PLATE)

All the variables which are caused by primary source  $I_0$  will have an index of 0. (vector magnetic potential) and (magnetic field intensity) will be calculated according to the Biot-Savart law. Since the current in a conductor only flows in the direction of the +x axis, the vector magnetic potential at the observation point on the z-axis will only have an x component, while the magnetic field intensity will only have a y and z component.

Vector magnetic potential  $A_0$  and magnetic field intensity at any point (x,y,z) are calculated as follows:



## 4 POSTAVLJANJE INTEGRALNIH JEDNADŽBI ZA MODEL

Neka se prema slikama 1 i 2 promatra navedeni model vodiča i feromagnetske ploče za kvazistatički slučaj.

Pretpostavlja se da su sve vremenske promjene sinusne s kružnom frekvencijom  $\omega$ .

## 4 SETTING THE INTEGRAL EQUATIONS FOR THE MODEL

Let us consider the model of the current carrying conductor and ferromagnetic plate for the quasi-static case according to Figures 1 and 2.

It is assumed that all the time variations are sinusoidal with angular frequency  $\omega$ :

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \quad (3)$$

Vanjski vremensko promjenjivi izvor  $\dot{I}_0$  u feromagnetskoj ploči uzrokuje magnetizaciju i vrtložne struje što se modelira sljedećim sekundarnim izvorima [1] i [2]:

- $\dot{J}_v$  – gustoća vrtložnih struja ( $A/m^2$ ) koja se razvija unutar volumena  $V$  feromagnetske ploče,
- $\dot{K}_m$  – linijska gustoća magnetizacijske struje ( $A/m$ ) koja se javlja na površini  $S$  feromagnetske ploče (magnetizacijski strujni oblog),
- $\dot{\sigma}_v$  – plošna gustoća električnog naboja ( $C/m^2$ ) koja se pojavljuje na površini  $S$  feromagnetske ploče,

Prema [1] i [2], ukupno magnetsko polje kojeg stvaraju navedeni primarni i sekundarni izvori u bilo kojoj točki prostora je:

The outer time varying source  $\dot{I}_0$  causes magnetic polarization and eddy currents in the ferromagnetic plate, which can be modeled by the following secondary sources [1] and [2]:

- $\dot{J}_v$  – surface eddy current density ( $A/m^2$ ), which appears inside the volume  $V$  of the ferromagnetic plate,
- $\dot{K}_m$  – line magnetizing current density ( $A/m$ ), which appears on the surface  $S$  of the ferromagnetic plate,
- $\dot{\sigma}_v$  – surface electric charge density ( $C/m^2$ ), which appears on the surface  $S$  of the ferromagnetic plate.

According to [1] and [2], the total magnetic field caused by the previously mentioned primary and secondary sources at any point of the space is as follows:

$$\dot{H}(r) = \dot{H}_0(r) + \dot{H}_v(r) + \dot{H}_s(r), \quad (4)$$

$$\dot{H}(r) = \dot{H}_0(r) + \frac{\mu_r}{4\pi} \int_V \dot{J}_v(r') \times \frac{R}{R^3} dV' + \frac{1}{4\pi} \int_S \dot{K}_m(r') \times \frac{R}{R^3} dS', \quad (5)$$

gdje je:

- $\dot{H}_0(r)$  – magnetsko polje koje u točki  $r$  stvara primarni izvor  $I_0$ ,
- $\dot{H}_v(r)$  – magnetsko polje koje u točki  $r$  stvara sekundarni izvor  $J_v$ ,
- $\dot{H}_s(r)$  – magnetsko polje koje u točki  $r$  stvara sekundarni izvor  $K_m$ ,
- $r$  – radij vektor promatrane točke (slika 3) u kojoj se računa polje (može biti bilo gdje u prostoru; unutar volumena  $V$  na površini  $S$  ili izvan volumena  $V$ ),

where:

- $\dot{H}_0(r)$  – the magnetic field at point  $r$  caused by the primary source  $I_0$ ,
- $\dot{H}_v(r)$  – the magnetic field at point  $r$  caused by the secondary source  $J_v$ ,
- $\dot{H}_s(r)$  – the magnetic field at point caused by the secondary source  $K_m$ ,
- $r$  – the radius vector of the observation point (Figure 3), in which the field is calculated (can be anywhere in the space; inside the volume  $V$ , on the surface  $S$  or outside volume  $V$ ),

$\mathbf{r}'$  – radij vektor tekuće točke integracije (slika 3) (može biti samo unutar volumena  $V$  ili na površini  $S$ ),  
 $\dot{\mathbf{R}}$  – vektor udaljenosti (slika 3).

$\mathbf{r}'$  – radius vector of the integration point (Figure 3) (can be either inside the volume  $V$  or on the surface  $S$ ),  
 $\dot{\mathbf{R}}$  – connecting vector (Figure 3).

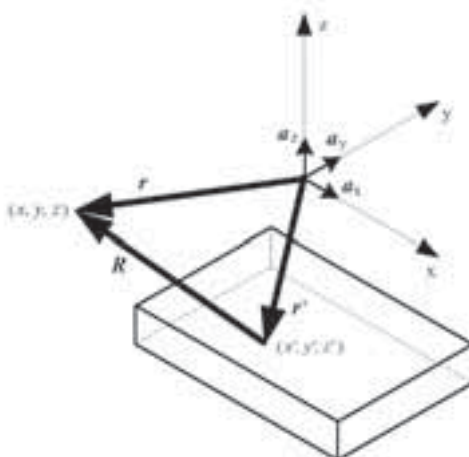
$$\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{a}_x + y \cdot \mathbf{a}_y + z \cdot \mathbf{a}_z, \quad (6)$$

$$\mathbf{r}' = x' \cdot \mathbf{a}_x + y' \cdot \mathbf{a}_y + z' \cdot \mathbf{a}_z, \quad (7)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad (8)$$

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}. \quad (9)$$

Slika 3  
 Radij vektori  
 Figure 3  
 Radius vectors



Vektorski magnetski potencijal u bilo kojoj točki prostora dan je sljedećim izrazom [1] i [2]:

The vector magnetic potential at any point of the space can be calculated as follows [1] and [2]:

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{A}}_0(\mathbf{r}) + \dot{\mathbf{A}}_V(\mathbf{r}) + \dot{\mathbf{A}}_S(\mathbf{r}), \quad (10)$$

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{A}}_0(\mathbf{r}) + \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \int_V \dot{\mathbf{J}}_v(\mathbf{r}') \frac{dV'}{R} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \dot{\mathbf{K}}_m(\mathbf{r}') \frac{dS'}{R}, \quad (11)$$

gdje je:

$\dot{A}_0(\mathbf{r})$  - vektorski magnetski potencijal kojeg u točki  $\mathbf{r}$  stvara primarni izvor  $\dot{I}_0$ ,  
 $\dot{A}_v(\mathbf{r})$  - vektorski magnetski potencijal kojeg u točki  $\mathbf{r}$  stvara sekundarni izvor  $\dot{J}_v$ ,  
 $\dot{A}_s(\mathbf{r})$  - vektorski magnetski potencijal kojeg u točki  $\mathbf{r}$  stvara sekundarni izvor  $\dot{K}_m$ .

Plošni naboj  $\sigma_v$  stvara skalarni električni potencijal  $\varphi$  koji je u bilo kojoj točki prostora dan izrazom [1] i [2]:

$$\dot{\varphi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \dot{\sigma}_v(\mathbf{r}') \frac{dS'}{R}, \quad (12)$$

gdje je  $\epsilon_0$  relativna dielektrična konstanta u zraku:  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  F/m.

Djelovanjem operatora grad na potencijal  $\varphi$ , za točku koja ne leži na  $S$  dobiva se:

$$\text{grad} \dot{\varphi}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \dot{\sigma}_v(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{R}}{R^3} dS', \quad (13)$$

Za točku na graničnoj plohi  $S$  vrijedi (s unutrašnje strane površine  $S$  feromagnetskog materijala) [1]:

$$\text{grad} \dot{\varphi}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) = \frac{\dot{\sigma}_v}{2\epsilon_0} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \dot{\sigma}_v(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})}{R^3} dS', \quad (14)$$

U bilo kojoj točki  $\mathbf{r}$  unutar volumena  $V$  vrijedi [3]:

$$\dot{J}_v(\mathbf{r}) = \gamma \cdot \dot{E}(\mathbf{r}) = \gamma \cdot \left( -\text{grad} \dot{\varphi}(\mathbf{r}) - j\omega \dot{A}(\mathbf{r}) \right). \quad (15)$$

where:

$\dot{A}_0(\mathbf{r})$  – the vector magnetic potential at point  $\mathbf{r}$  caused by the primary source  $\dot{I}_0$ ,  
 $\dot{A}_v(\mathbf{r})$  – the vector magnetic potential at point  $\mathbf{r}$  caused by the secondary source  $\dot{J}_v$ ,  
 $\dot{A}_s(\mathbf{r})$  – the vector magnetic potential at point  $\mathbf{r}$  caused by the secondary source  $\dot{K}_m$ .

Surface charge  $\sigma_v$  creates electric scalar potential  $\varphi$ . At any point of the space, this potential can be calculated, as follows [1] and [2]:

where  $\epsilon_0$  is the relative dielectric constant in the air  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  F/m.

If the operator grad is applied to the potential  $\varphi$ ,  $S$  can be written as follows for any point that does not lie on the surface:

For a point on the surface  $S$  (from the inner side of the surface  $S$  of the ferromagnetic material), the following can be written [1]:

At any point  $\mathbf{r}$  inside the volume  $V$ , the following can be written:

Uvrštavanjem izraza (11) i (13) u (15) dobiva se:

Inserting expressions (11) and (13) into (15), it follows:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{J}}_v(\mathbf{r}) + \frac{j\omega\gamma\mu_0\mu_r}{4\pi} \int_{V'} \dot{\mathbf{J}}_v(\mathbf{r}') \frac{dV'}{R} + \frac{j\omega\gamma\mu_0}{4\pi} \int_S \dot{\mathbf{K}}_m(\mathbf{r}') \frac{dS'}{R} - \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \int_S \dot{\sigma}_v(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{R}}{R^3} dS' \\ = -j\omega\gamma \dot{\mathbf{A}}_0(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (16)$$

U bilo kojoj točki  $\mathbf{r}$  na površini  $S$  vrijedi [1]:

At any point  $\mathbf{r}$  on the surface  $S$ , the following can be written [1]:

$$\dot{\mathbf{K}}_m(\mathbf{r}) = 2 \cdot \lambda_m \cdot \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}(\mathbf{r}) = 2 \cdot \lambda_m \cdot \left[ \dot{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r}) + \dot{\mathbf{H}}_v(\mathbf{r}) + \dot{\mathbf{H}}_s(\mathbf{r}) \right] \times \mathbf{n}(\mathbf{r}) \quad (17)$$

gdje je:

where:

$\mathbf{n}(\mathbf{r})$  - okomica na površinu u točki  $\mathbf{r}$ .

$\mathbf{n}(\mathbf{r})$  – Normal at the point  $\mathbf{r}$ .

Usmjerena je iz feromagnetskog materijala prema van.

The direction is from the ferromagnetic material towards the outside:

$$\lambda_m = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}. \quad (18)$$

Uvrštavanjem izraza (5) u (17), dobiva se:

Inserting expression (5) into (17), it follows:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}_m(\mathbf{r}) - \frac{\lambda_m \cdot \mu_r}{2\pi} \int_{V'} \left( \dot{\mathbf{J}}_v(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) \times \mathbf{n}(\mathbf{r}) dV' - \frac{\lambda_m}{2\pi} \int_S \left( \dot{\mathbf{K}}_m(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) \times \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS' \\ = 2 \cdot \lambda_m \cdot \dot{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (19)$$

Također se za bilo koju točku  $\mathbf{r}$  na površini  $S$  može napisati [3]:

At any point  $\mathbf{r}$  on the surface  $S$ , the following can also be written [3]:

$$\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -\text{grad}\varphi(\mathbf{r}) - j\omega \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}). \quad (20)$$

Iz uvjeta na granici feromagnetski materijal-zrak dobiva se [1]:

From the conditions at the boundary between the ferromagnetic material and the air, it follows [1]:

$$\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) = \dot{0}. \quad (21)$$

Množenjem (20) sa  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  i uvrštavanjem (11), (14) i (21) u (20), slijedi:

Multiplying (20) by  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  and inserting (11), (14) and (21) into (20), it follows:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_v(\mathbf{r}) + \frac{j\omega\mu_0\mu_r\epsilon_0}{2\pi} \int_V \dot{\mathbf{J}}_v(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{n}(\mathbf{r})}{R} dV' + \frac{j\omega\mu_0\epsilon_0}{2\pi} \int_S \dot{\mathbf{K}}_m(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{n}(\mathbf{r})}{R} dS' - \frac{1}{2\pi} \int_{S'} \dot{\sigma}_v(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})}{R^3} dS' \\ = -2j\omega\epsilon_0 \dot{\mathbf{A}}_0(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (22)$$

Izrazi (16), (19) i (22) su integralne jednačbe iz kojih se dobivaju traženi sekundarni izvori.

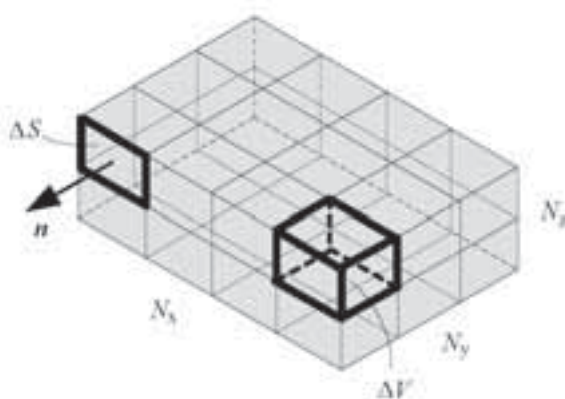
Expressions (16), (19) and (22) are integral equations from which secondary sources are calculated.

## 5 DISKRETIZACIJA INTEGRALNIH JEDNADŽBI

Da bi se odredili  $\dot{\mathbf{J}}_v$  (unutar volumena  $V$ ),  $\dot{\mathbf{K}}_m$  i  $\dot{\sigma}_v$  (na površini  $S$  feromagnetske ploče), volumen  $V$  se dijeli  $N_V$  na volumnih elemenata, a površina  $S$  (oplošje kvadra) na  $N_S$  površinskih elemenata (slika 4).  $N_x$  je broj podjela u smjeru  $x$  osi,  $N_y$  broj podjela u smjeru  $y$  osi i  $N_z$  broj podjela u smjeru  $z$  osi. Kao elementarni volumen  $\Delta V$  uzet će se kvadar zbog konstantnih granica integracije. Elementarna površina  $\Delta S$  je pravokutnik.

## 5 DISCRETIZATION OF INTEGRAL EQUATIONS

In order to find  $\dot{\mathbf{J}}_v$  (inside the volume  $V$ ),  $\dot{\mathbf{K}}_m$  and  $\dot{\sigma}_v$  (on the surface  $S$  of the ferromagnetic plate), volume  $V$  is divided into  $N_V$  volume elements, while the surface  $S$  (surface of the cuboid) is divided into  $N_S$  surface elements (Figure 4).  $N_x$  is the number of divisions in the direction of the  $x$ -axis,  $N_y$  is number of divisions in the direction of the  $y$ -axis and  $N_z$  is the number of divisions in the direction of the  $z$ -axis. Elementary volume  $\Delta V$  is cuboid because of the constant borders of integration. Elementary surface  $\Delta S$  is rectangular.



**Slika 4**

Podjela volumena  $V$  i površine  $S$  feromagnetske ploče na elementarne volumene  $\Delta V$  i elementarne površine  $\Delta S$

Figure 4  
Division of the volume  $V$  and surface  $S$  of the ferromagnetic plate into elementary volumes  $\Delta V$  and elementary surfaces  $\Delta S$ .

Prema slici 4 vrijedi:

According to Figure 4, it follows:

$$N_v = N_x \cdot N_y \cdot N_z, \quad (23)$$

$$N_s = 2 \cdot (N_x \cdot N_y + N_x \cdot N_z + N_y \cdot N_z). \quad (24)$$

Pretpostavit će se da je  $\dot{J}_v$  konstantan unutar svakog elementarnog volumena  $\Delta V$  te da su  $\dot{K}_m$  i  $\dot{\sigma}_v$  konstantni na svakoj elementarnoj površini  $\Delta S$ .

It will be assumed that  $\dot{J}_v$  is constant inside every elementary volume  $\Delta V$  and that  $\dot{K}_m$  and  $\dot{\sigma}_v$  are constant on every elementary surface  $\Delta S$ .

Integralne jednadžbe (16), (19) i (22) napisat će se u obliku skalarnih jednadžbi po komponentama. Jednadžbe će se postavljati u težištima volumnih i plošnih elemenata.

Integral equations (16), (19) and (22) will be written in the form of scalar equations for the components. The equations will be set in the center points of the volume and surface elements.

Za bilo koju točku  $r_i$  težišta elementarnog volumena  $\Delta V_i$  vrijedi ( $r_i'$  je težište tekućeg volumnog ili površinskog elementa po kojem se integrira):

For any center point  $r_i$  of elementary volume  $\Delta V_i$  the following can be written ( $r_i'$  is the center point of either volume or surface element being integrated):

$$\begin{aligned} \dot{J}_{vx}(r_i) + \frac{j\omega\gamma\mu_0\mu_r}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_v} \dot{J}_{vx}(r_i') \int_{\Delta V_i'} \frac{dV'}{R} + \frac{j\omega\gamma\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_s} \dot{K}_{mx}(r_i') \int_{\Delta S_i'} \frac{dS'}{R} - \\ \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N_s} \dot{\sigma}_v(r_i') \int_{\Delta S_i'} \frac{x-x'}{R^3} dS' = -j\omega\gamma \dot{A}_{0x}(r_i), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \dot{J}_{vy}(r_i) + \frac{j\omega\gamma\mu_0\mu_r}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_v} \dot{J}_{vy}(r_i') \int_{\Delta V_i'} \frac{dV'}{R} + \frac{j\omega\gamma\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_s} \dot{K}_{my}(r_i') \int_{\Delta S_i'} \frac{dS'}{R} - \\ \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N_s} \dot{\sigma}_v(r_i') \int_{\Delta S_i'} \frac{y-y'}{R^3} dS' = -j\omega\gamma \dot{A}_{0y}(r_i), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \dot{J}_{vz}(r_i) + \frac{j\omega\gamma\mu_0\mu_r}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_v} \dot{J}_{vz}(r_i') \int_{\Delta V_i'} \frac{dV'}{R} + \frac{j\omega\gamma\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_s} \dot{K}_{mz}(r_i') \int_{\Delta S_i'} \frac{dS'}{R} - \\ \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N_s} \dot{\sigma}_v(r_i') \int_{\Delta S_i'} \frac{z-z'}{R^3} dS' = -j\omega\gamma \dot{A}_{0z}(r_i). \end{aligned} \quad (27)$$

Za bilo koju točku  $r_i$  težišta elementarne površine  $\Delta S_i$  vrijedi:

For any center point  $r_i$  of elementary surface  $\Delta S_i$ , the following can be written:

$$\begin{aligned}
 & \dot{K}_{mx}(r_i) + \frac{\lambda_m \cdot \mu_r}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_v} \dot{J}_{vx}(r_i') \int_{\Delta V_i'} \frac{(y-y') \cdot n_y(r_i) + (z-z') \cdot n_z(r_i)}{R^3} dV_i' - \\
 & \frac{\lambda_m \cdot \mu_r}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_v} \dot{J}_{vy}(r_i') \int_{\Delta V_i'} \frac{(x-x') \cdot n_x(r_i)}{R^3} dV_i' - \frac{\lambda_m \cdot \mu_r}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_v} \dot{J}_{vz}(r_i') \int_{\Delta V_i'} \frac{(x-x') \cdot n_x(r_i)}{R^3} dV_i' + \\
 & \frac{\lambda_m}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_s} \dot{K}_{mx}(r_i') \int_{\Delta S_i} \frac{(y-y') \cdot n_y(r_i) + (z-z') \cdot n_z(r_i)}{R^3} dS_i' - \\
 & \frac{\lambda_m}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_s} \dot{K}_{my}(r_i') \int_{\Delta S_i} \frac{(x-x') \cdot n_x(r_i)}{R^3} dS_i' - \frac{\lambda_m}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_s} \dot{K}_{mz}(r_i') \int_{\Delta S_i} \frac{(x-x') \cdot n_x(r_i)}{R^3} dS_i' \\
 & = 2 \cdot \lambda_m \cdot \left( \dot{H}_{0y}(r_i) \cdot n_z(r_i) - \dot{H}_{0z}(r_i) \cdot n_y(r_i) \right),
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
 & \dot{K}_{my}(r_i) - \frac{\lambda_m \cdot \mu_r}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_v} \dot{J}_{vx}(r_i') \int_{\Delta V_i'} \frac{(y-y') \cdot n_x(r_i)}{R^3} dV_i' + \\
 & \frac{\lambda_m \cdot \mu_r}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_v} \dot{J}_{vy}(r_i') \int_{\Delta V_i'} \frac{(x-x') \cdot n_x(r_i) + (z-z') \cdot n_z(r_i)}{R^3} dV_i' - \\
 & \frac{\lambda_m \cdot \mu_r}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_v} \dot{J}_{vz}(r_i') \int_{\Delta V_i'} \frac{(y-y') \cdot n_x(r_i)}{R^3} dV_i' - \\
 & \frac{\lambda_m}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_s} \dot{K}_{mx}(r_i') \int_{\Delta S_i} \frac{(y-y') \cdot n_x(r_i)}{R^3} dS_i' + \\
 & \frac{\lambda_m}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_s} \dot{K}_{my}(r_i') \int_{\Delta S_i} \frac{(x-x') \cdot n_x(r_i) + (z-z') \cdot n_z(r_i)}{R^3} dS_i' - \\
 & \frac{\lambda_m}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_s} \dot{K}_{mz}(r_i') \int_{\Delta S_i} \frac{(y-y') \cdot n_x(r_i)}{R^3} dS_i' \\
 & = 2 \cdot \lambda_m \cdot \left( -\dot{H}_{0x}(r_i) \cdot n_z(r_i) + \dot{H}_{0z}(r_i) \cdot n_x(r_i) \right),
 \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
& \dot{K}_{mz}(\mathbf{r}_i) - \frac{\lambda_m \cdot \mu_r}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_s} \dot{J}_{vx}(\mathbf{r}_i') \int_{\Delta V_i'} \frac{(z-z') \cdot n_x(\mathbf{r}_i)}{R^3} dV' - \\
& \frac{\lambda_m \cdot \mu_r}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_s} \dot{J}_{vy}(\mathbf{r}_i') \int_{\Delta V_i'} \frac{(z-z') \cdot n_y(\mathbf{r}_i)}{R^3} dV' + \\
& \frac{\lambda_m \cdot \mu_r}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_s} \dot{J}_{vz}(\mathbf{r}_i') \int_{\Delta V_i'} \frac{(x-x') \cdot n_x(\mathbf{r}_i) + (y-y') \cdot n_y(\mathbf{r}_i)}{R^3} dV' - \\
& \frac{\lambda_m}{2\pi} \sum_{\substack{i=1 \\ \mathbf{r}_i' \neq \mathbf{r}_i}}^{N_s} \dot{K}_{mx}(\mathbf{r}_i') \int_{\Delta S_i'} \frac{(z-z') \cdot n_x(\mathbf{r}_i)}{R^3} dS' - \\
& \frac{\lambda_m}{2\pi} \sum_{\substack{i=1 \\ \mathbf{r}_i' \neq \mathbf{r}_i}}^{N_s} \dot{K}_{my}(\mathbf{r}_i') \int_{\Delta S_i'} \frac{(z-z') \cdot n_y(\mathbf{r}_i)}{R^3} dS' + \\
& \frac{\lambda_m}{2\pi} \sum_{\substack{i=1 \\ \mathbf{r}_i' \neq \mathbf{r}_i}}^{N_s} \dot{K}_{mz}(\mathbf{r}_i') \int_{\Delta S_i'} \frac{(x-x') \cdot n_x(\mathbf{r}_i) + (y-y') \cdot n_y(\mathbf{r}_i)}{R^3} dS' \\
& = 2 \cdot \lambda_m \cdot \left( \dot{H}_{0x}(\mathbf{r}_i) \cdot n_y(\mathbf{r}_i) - \dot{H}_{0y}(\mathbf{r}_i) \cdot n_x(\mathbf{r}_i) \right),
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
& \dot{\sigma}_v(\mathbf{r}_i) + \frac{j\omega\mu_0\mu_r\epsilon_0}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_s} \dot{J}_{vx}(\mathbf{r}_i') \cdot n_x(\mathbf{r}_i) \int_{\Delta V_i'} \frac{dV'}{R^3} + \\
& \frac{j\omega\mu_0\mu_r\epsilon_0}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_s} \dot{J}_{vy}(\mathbf{r}_i') \cdot n_y(\mathbf{r}_i) \int_{\Delta V_i'} \frac{dV'}{R^3} + \frac{j\omega\mu_0\mu_r\epsilon_0}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_s} \dot{J}_{vz}(\mathbf{r}_i') \cdot n_z(\mathbf{r}_i) \int_{\Delta V_i'} \frac{dV'}{R^3} + \\
& \frac{j\omega\mu_0\epsilon_0}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_s} \dot{K}_{mx}(\mathbf{r}_i') \cdot n_x(\mathbf{r}_i) \int_{\Delta S_i'} \frac{dS'}{R^3} + \frac{j\omega\mu_0\epsilon_0}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_s} \dot{K}_{my}(\mathbf{r}_i') \cdot n_y(\mathbf{r}_i) \int_{\Delta S_i'} \frac{dS'}{R^3} + \\
& \frac{j\omega\mu_0\epsilon_0}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_s} \dot{K}_{mz}(\mathbf{r}_i') \cdot n_z(\mathbf{r}_i) \int_{\Delta S_i'} \frac{dS'}{R^3} - \\
& \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{i=1 \\ \mathbf{r}_i' \neq \mathbf{r}_i}}^{N_s} \dot{\sigma}_v(\mathbf{r}_i') \int_{\Delta S_i'} \frac{(x-x') \cdot n_x(\mathbf{r}_i) + (y-y') \cdot n_y(\mathbf{r}_i) + (z-z') \cdot n_z(\mathbf{r}_i)}{R^3} dS' \\
& = -2j\omega\epsilon_0 \cdot \left( \dot{A}_{0x}(\mathbf{r}_i) \cdot n_x(\mathbf{r}_i) + \dot{A}_{0y}(\mathbf{r}_i) \cdot n_y(\mathbf{r}_i) + \dot{A}_{0z}(\mathbf{r}_i) \cdot n_z(\mathbf{r}_i) \right),
\end{aligned} \tag{31}$$



Budući da ukupno postoji  $3N_V + 4N_S$  nepoznatih sekundarnih izvora u težištima volumnih i površinskih elemenata, potrebno je napisati isto toliko skalarnih integralnih jednadžbi. U tu se svrhu svaka od jednadžbi (25), (26) i (27) postavlja u svim težišnim točkama volumnih elemenata (ukupno  $3N_V$  skalarnih jednadžbi), dok se svaka od jednadžbi (28), (29), (30) i (31) postavlja u svim težišnim točkama površinskih elemenata (ukupno  $4N_S$  skalarnih jednadžbi).

Rješavanjem linearnog sustava od  $3N_V + 4N_S$  jednadžbi sa  $3N_V + 4N_S$  nepoznanica, dobivaju se traženi sekundarni izvori u težištima volumnih i površinskih elemenata.

Magnetsko polje u bilo kojoj točki  $r$  prostora je:

Since there are  $3N_V + 4N_S$  of unknown secondary sources in the center points of the volume and surface elements, it is necessary to write the same number of scalar integral equations. Therefore, equations (25), (26) and (27) are set in all the center points of the volume elements (a total of  $3N_V$  scalar equations), while equations (28), (29), (30) and (31) are set in all the center points of the surface elements (a total of  $4N_S$  scalar equations).

By solving the linear system of  $3N_V + 4N_S$  equations with  $3N_V + 4N_S$  unknowns, the secondary sources at the center points of volume and surface elements are obtained.

The magnetic field at any point  $r$  of the space is as follows:

$$\begin{aligned} \dot{H}_x(r) = \dot{H}_{0x}(r) + \frac{\mu_r}{4\pi} \left( \sum_{i=1}^{N_V} \dot{J}_{vy}(r'_i) \int_{\Delta V'_i} \frac{z-z'}{R^3} dV' - \sum_{i=1}^{N_V} \dot{J}_{vx}(r'_i) \int_{\Delta V'_i} \frac{y-y'}{R^3} dV' \right) + \\ \frac{1}{4\pi} \left( \sum_{i=1}^{N_S} \dot{K}_{my}(r'_i) \int_{\Delta S'_i} \frac{z-z'}{R^3} dS' - \sum_{i=1}^{N_S} \dot{K}_{mx}(r'_i) \int_{\Delta S'_i} \frac{y-y'}{R^3} dS' \right), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_y(r) = \dot{H}_{0y}(r) + \frac{\mu_r}{4\pi} \left( - \sum_{i=1}^{N_V} \dot{J}_{vx}(r'_i) \int_{\Delta V'_i} \frac{z-z'}{R^3} dV' + \sum_{i=1}^{N_V} \dot{J}_{vy}(r'_i) \int_{\Delta V'_i} \frac{x-x'}{R^3} dV' \right) + \\ \frac{1}{4\pi} \left( - \sum_{i=1}^{N_S} \dot{K}_{mx}(r'_i) \int_{\Delta S'_i} \frac{z-z'}{R^3} dS' + \sum_{i=1}^{N_S} \dot{K}_{my}(r'_i) \int_{\Delta S'_i} \frac{x-x'}{R^3} dS' \right), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_z(r) = \dot{H}_{0z}(r) + \frac{\mu_r}{4\pi} \left( \sum_{i=1}^{N_V} \dot{J}_{vx}(r'_i) \int_{\Delta V'_i} \frac{y-y'}{R^3} dV' - \sum_{i=1}^{N_V} \dot{J}_{vy}(r'_i) \int_{\Delta V'_i} \frac{x-x'}{R^3} dV' \right) + \\ \frac{1}{4\pi} \left( \sum_{i=1}^{N_S} \dot{K}_{mx}(r'_i) \int_{\Delta S'_i} \frac{y-y'}{R^3} dS' - \sum_{i=1}^{N_S} \dot{K}_{my}(r'_i) \int_{\Delta S'_i} \frac{x-x'}{R^3} dS' \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Za navedeni model u kojem se polje računa u smjeru osi  $z$  je  $H_{0x} = H_{0z} = 0$ .

For the defined model,  $H_{0x} = H_{0z} = 0$ .

Magnetska indukcija  $B$  se dobiva množenjem magnetskog polja sa  $\mu_0$ :

Magnetic flux density  $B$  is obtained by multiplying the magnetic field intensity by  $\mu_0$ :

$$\dot{B}_x(\mathbf{r}) = \mu_0 \cdot \dot{H}_x(\mathbf{r}), \quad (35)$$

$$\dot{B}_y(\mathbf{r}) = \mu_0 \cdot \dot{H}_y(\mathbf{r}), \quad (36)$$

$$\dot{B}_z(\mathbf{r}) = \mu_0 \cdot \dot{H}_z(\mathbf{r}). \quad (37)$$

Efektivna vrijednost magnetske indukcije u bilo kojoj točki prostora je:

The effective value of the magnetic flux density at any point of the space is as follows:

$$B(\mathbf{r}) = \sqrt{|\dot{B}_x(\mathbf{r})|^2 + |\dot{B}_y(\mathbf{r})|^2 + |\dot{B}_z(\mathbf{r})|^2}. \quad (38)$$

## 6 PRIKAZ REZULTATA MJERENJA

Mjerenje magnetskog polja obavljeno je na pet modela prema slici 1. Podaci o modelima nalaze se u tablici 1.

## 6 MEASUREMENT RESULTS

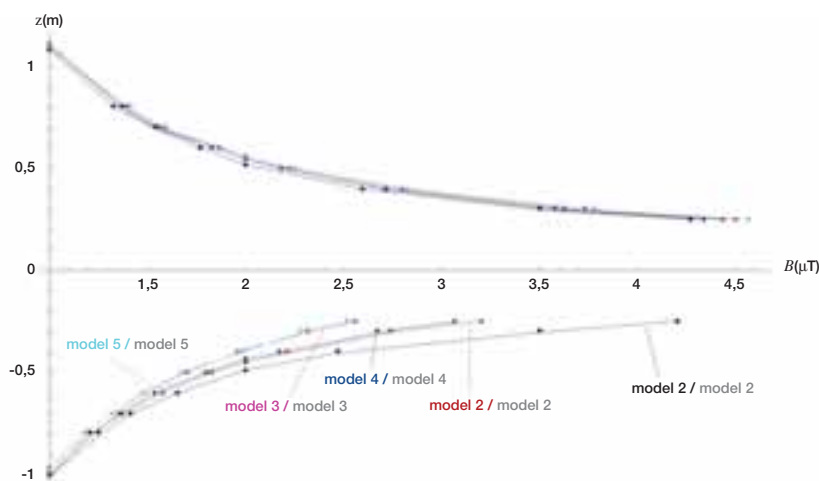
Magnetic field measurement was performed on five models according to Figure 1. Model data are given in Table 1.

Tablica 1 – Podaci modela  
Table 1 – Model data

MODEL / Model	$I_0$ (A)	$f$ (Hz)	$l$ (m)	$p$ (m)	$d$ (m)	$a$ (m)	$b$ (m)	$c$ (m)	$z_p$ (m)
1	5,26	50	7,3	0,175	0,005	-	-	-	-
2	5,26	50	7,3	0,175	0,005	0,51	0,80	0,00125	-0,146
3	5,26	50	7,3	0,175	0,005	0,51	0,80	0,00250	-0,146
4	5,26	50	7,3	0,175	0,005	0,80	0,51	0,00125	-0,146
5	5,26	50	7,3	0,175	0,005	0,80	0,51	0,00250	-0,146

Krivulje izmjerenih vrijednosti magnetske indukcije po z osi na modelima prikazane su na slici 5. Vidljivo je da se umetanjem feromagnetske ploče ispod vodiča smanjuje magnetsko polje ispod ploče, dok se magnetsko polje iznad vodiča neznatno povećava. Što je ploča deblja, prigušenje polja ispod ploče je veće.

The curves of the measured values of the magnetic flux density along the z-axis are given in Figure 5. It can be seen that the inserted ferromagnetic plate beneath the conductor decreases the magnetic field under the plate and slightly increases the magnetic field above the conductor. The thicker the plate, the greater the attenuation of the field under the plate.



**Slika 5**  
Krivulje izmjerenih vrijednosti  $B$  po  $z$  osi na modelima  
**Figure 5**  
Curves of the measured values of  $B$  along the  $z$ -axis for the models

## 7 USPOREDBA REZULTATA PRORAČUNA I MJERENJA

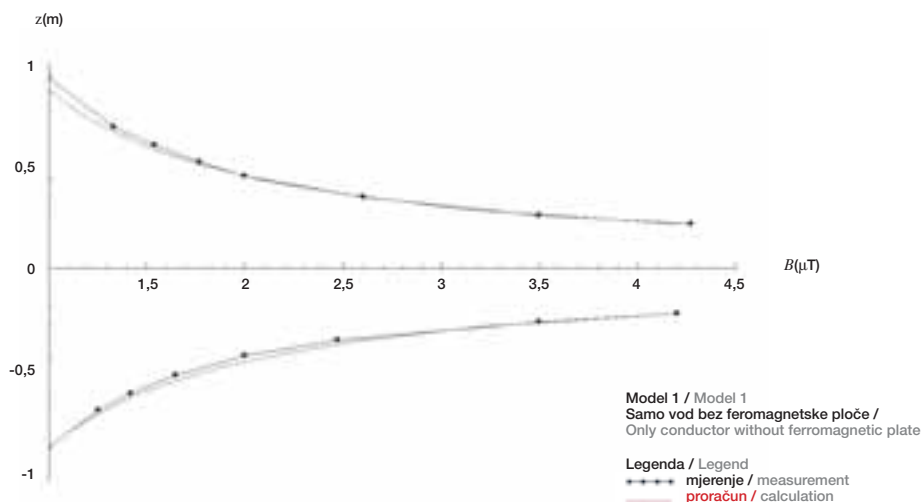
Kao što je već rečeno, proračun magnetskog polja na modelu napravljen uz zanemarenje progiba i promjera vodiča te zanemarenje utjecaja svih ostalih izvora i materijala na polje vodiča (osim navedene feromagnetske ploče). Krivulje usporedbe mjerenih i računskih vrijednosti  $B$  za modele 1 do 5 prikazane su na slikama 6 do 10. Uspoređene krivulje dobro se slažu.

Odstupanja od oko 15 % postoje u najvišim mjernim točkama iznad vodiča (cca na 1 m iznad vodiča) zbog utjecaja polja ostalih izvora.

## 7 COMPARISON OF THE CALCULATED AND MEASURED DATA

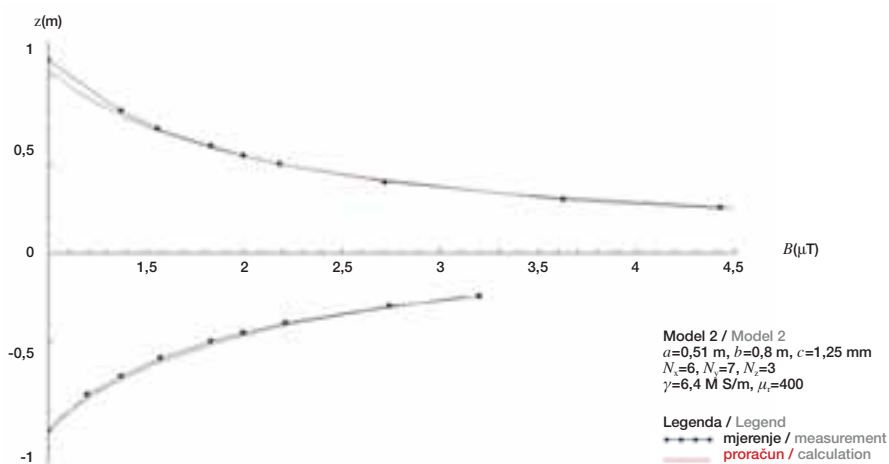
As previously stated, the deflection and diameter of the conductor are ignored in the calculation of the magnetic field intensity of the model. Furthermore, the influence of other sources and materials (except the ferromagnetic plate) on the magnetic field of the conductor is ignored. The measured and calculated curves of  $B$  for models 1 to 5 are shown in Figures 6 to 10. The compared curves have good matching.

Deviation of approximately 15 % exists only in the highest measured points above the conductor (approximately 1 m above the conductor) due to the influence of the other conductors.

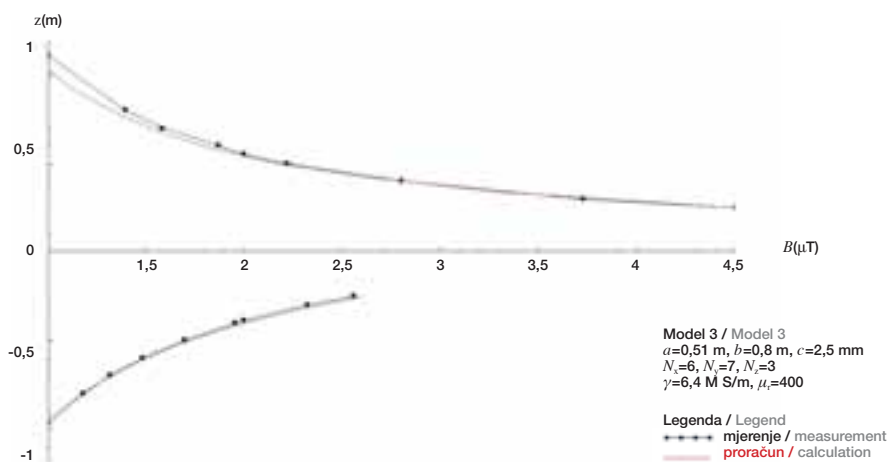


**Slika 6**  
Usporedba krivulja izmjerenih i računskih vrijednosti  $B$  za model 1  
**Figure 6**  
Comparison of the measured and calculated curves of  $B$  for Model 1

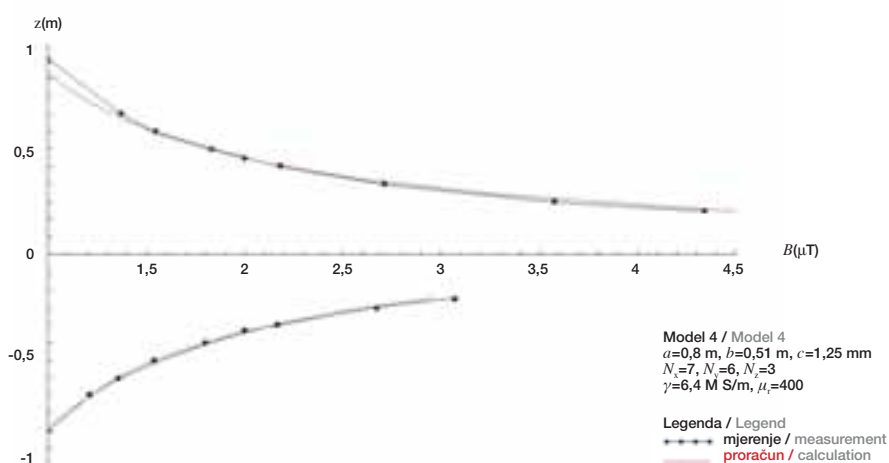
**Slika 7**  
 Usporedba krivulja  
 izmjerenih i računskih  
 vrijednosti  $B$  za  
 model 2  
 Figure 7  
 Comparison of  
 the measured and  
 calculated curves of  $B$   
 for Model 2

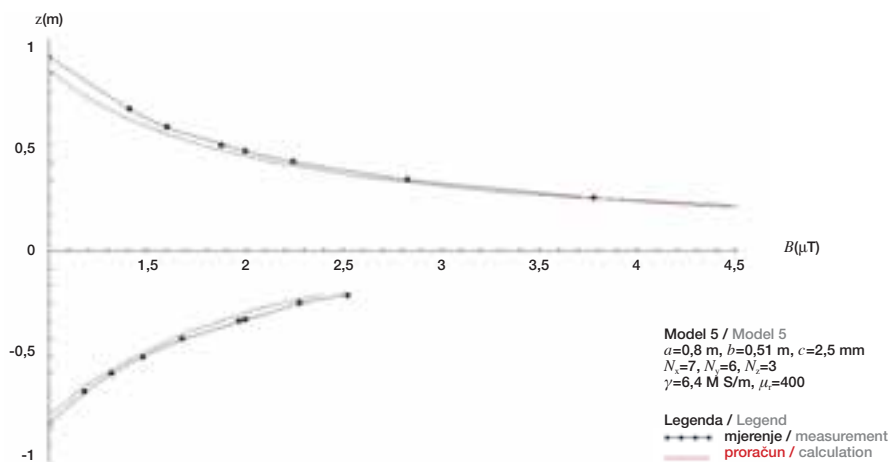


**Slika 8**  
 Usporedba krivulja  
 izmjerenih i računskih  
 vrijednosti  $B$  za  
 model 3  
 Figure 8  
 Comparison of  
 the measured and  
 calculated curves of  $B$   
 for Model 3



**Slika 9**  
 Usporedba krivulja  
 izmjerenih i računskih  
 vrijednosti  $B$  za  
 model 4  
 Figure 9  
 Comparison of  
 the measured and  
 calculated curves of  $B$   
 for Model 4





**Slika 10**  
 Usporedba krivulja  
 izmjerenih i računskih  
 vrijednosti  $B$  za  
 model 5  
**Figure 10**  
 Comparison of  
 the measured and  
 calculated curves of  $B$   
 for Model 5

## 8 ZAKLJUČAK

3D proračun kvazistatičkog magnetskog polja preko integralnih jednadžbi pokazuje se vrlo efikasnim u prostoru u kojem se traži polje daleko od izvora i u kojem nema puno različitih feromagnetskih materijala. Pri tome se pretpostavlja da su vodljivost i permeabilnost feromagnetskog materijala konstantni.

Za navedeni model vodiča i feromagnetske ploče postoji vrlo dobro slaganje rezultata mjerenja i proračuna. Feromagnetska ploča, umetnuta ispod vodiča, smanjuje magnetsko polje vodiča u području ispod feromagnetske ploče, a neznatno povećava magnetsko polje iznad vodiča.

## 8 CONCLUSION

The 3D calculation of a quasistatic magnetic field by means of integral equations is very effective for a space in which the field to be calculated is far from the source and in which there are not many different ferromagnetic materials. The conductivity and permeability of the ferromagnetic material are assumed to be constant.

For the defined model of the current carrying conductor and ferromagnetic plate, the results of the measurements and calculations are in good agreement. The insertion of a ferromagnetic plate beneath under the conductor decreases the magnetic field under the plate and slightly increases the magnetic field above the conductor.

## LITERATURA / REFERENCES

- [1] MATJAN, J., Rješavanje zadaća elektromagnetskog polja integralnim jednadžbama, doktorska disertacija, ETF, Zagreb, 1977.
- [2] TOZONI, O. V., I. D. MAYERGOIZ, Calculation of three-dimensional Electromagnetic Fields, Tekhnika, Kiev, 1974
- [3] HAZNADAR, Z. i ŠTIH, Ž., Elektromagnetizam 1, Školska knjiga, Zagreb, 1997.
- [4] HAZNADAR, Z. i ŠTIH, Ž., Elektromagnetizam 2, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

Uredništvo primilo rukopis:  
 2007-10-23

Manuscript received on:  
 2007-10-23

Prihvaćeno:  
 2007-12-04

Accepted on:  
 2007-12-04

# GRANICE VALJANOSTI IZRAZA ZA MJERENJA SPECIFIČNOG OTPORA TLA WENNEROVOM METODOM PREMA IEEE NORMI Std. 81-1983 VALIDITY LIMITS OF THE EXPRESSION FOR MEASURING SOIL RESISTIVITY BY THE WENNER METHOD ACCORDING TO IEEE STANDARD 81-1983

Mr. sc. Tomislav Barić, dr. sc. Damir Šljivac,  
Sveučilište J. J. Strossmayer, Elektrotehnički Fakultet,  
Kneza Trpimira 2b, 31000 Osijek, Hrvatska  
Dr. sc. Marinko Stojkov, HEP Operator distribucijskog sustava d.o.o.,  
P. Krešimira IV 11, 35000 Slavonski Brod, Hrvatska

Za analizu rezultata i obavljanje mjerenja specifičnog otpora tla inženjerima su dane na raspolaganje smjernice i nautci različitih međunarodnih normi. Prilikom korištenja matematičkih izraza iz navedenih normi često nisu jasne okolnosti pod kojima su dobiveni navedeni izrazi. Jedan takav slučaj opisan je u ovom članku, a odnosi se na međunarodnu normu IEEE Std. 81-1983, izraz za prividni specifični otpor tla, a koji se odnosi na teorijski model i predviđanje mjernih rezultata dobivenih Wennerovim mjernim rasporedom elektroda. U IEEE Std. 81-1983 štapne elektrode su modelirane kao kuglaste, što u konačnici rezultira jednostavnim matematičkim izrazom za prividni specifični otpor tla. Zbog navedenog pojednostavljenja inženjeri nemaju uvid u granice valjanosti prema normi dobivenog izraza, odnosno njegovu točnost.

For the analysis of soil resistivity results and measurement, engineers have guidelines and instructions from various international standards at their disposal. The circumstances under which the mathematical expressions in these standards were obtained are not always clear. One such case is described in this article and refers to the international IEEE Standard 81-1983, an expression for apparent soil resistivity, and refers to a theoretical model and the prediction and interpretation of measurement results obtained by using the Wenner method of electrode arrangement. In IEEE Std. 81-1983, rod electrodes are modeled as spherical, which ultimately results in a simplified mathematical expression for apparent soil resistivity. Due to this simplification, the expression in this standard does not provide engineers with insight into its validity limits, i.e. accuracy.

**Ključne riječi:** IEEE std. 81-1983, prividni otpor tla, specifični otpor tla, Wennerov raspored elektroda  
**Key words:** apparent soil resistivity, IEEE Std. 81-1983, soil resistivity, Wenner electrode arrangement



## 1 UVOD

Reforma školstva fakultetskog i srednjeg obrazovanja kontinuiran je proces koji se odvija u cijelome svijetu. Reforme najčešće imaju trend smanjivanja opsega nastavnog gradiva, koji se provodi smanjenjem udjela satnice teorijskih predmeta, a povećanjem udjela nastavnih sati praktične nastave, odnosno znanstveno usmjeravajući predmeti. Inženjeri školovani u takvom okruženju suočeni su s poteškoćama u tumačenju i korištenju matematičkog instrumentarija pri složenijim zadaćama, a koje im se nameću u inženjerskoj praksi. Iz tog razloga različita normativna međunarodna tijela prilikom izdavanja normi, čije smjernice i nuputke i mi slijedimo, koriste vrlo jednostavne matematičke izraze u svojim izdanjima. Takvi izrazi izvedeni su pod brojnim pretpostavkama, kako fizikalnim, tako i matematičkim. Navedena pojednostavljena fizikalne slike opravdana su pod određenim uvjetima koji se u normama često ne navode. Naime, mnoge norme pisane su u vrijeme kada je nastavni program u većini zemalja svijeta sadržajno bio bogatiji teorijskim predmetima te većom satnicom matematike. Inženjeri kao korisnici normi u takvim uvjetima često nemaju potpunu predodžbu o mogućoj pogrešci pri korištenju normom preporučenih izraza za proračune ukoliko se ista koristi u graničnim uvjetima, ili izvan njih. Osim navedenog, znatan udio međunarodnih normi pisan je unazad nekoliko desetljeća, u vrijeme kada su osobna računala bila dostupna užem krugu inženjerske populacije. Naime, tek od kolovoza 1981. godine kada je IBM na tržište lansirao osobno računalo (PC) započela je era osobnih računala. Danas, 25 godina poslije, kada gotovo svaki inženjer u razvijenom svijetu posjeduje osobno računalo nije potrebno da se za inženjerske proračune koriste matematički pojednostavljeni izrazi, koji vrijede u vrlo uskim granicama fizikalnih varijabli. Ovaj članak daje osvrt na jedan takav izraz opisan međunarodnom normom IEEE Std. 81-1983 [1] za interpretaciju mjernih rezultata mjerenjem specifičnog otpora tla Wennerovom metodom. Da bi se odredila točnost izraza prema međunarodnoj normi IEEE Std. 81-1983 određen je točan izraz za prividni specifični električni otpor dvoslojnog tla mjereno Wennerovom tehnikom [2]. Na nekoliko primjera koji se mogu javiti u praksi određena je pogreška predviđanja prividnog specifičnog otpora tla prema normi IEEE Std. 81-1983 u odnosu na točniji pristup prikazan u ovom članku. Rezultati oba pristupa prikazani su analitički, grafički te diskutirani.

## 1 INTRODUCTION

Reform of higher and secondary education is an ongoing process throughout the world. Reforms most often tend to reduce the range of material taught and are implemented by reducing the percentage of the class hours devoted to theoretical subjects and increasing the percentage of class hours devoted to practical subjects, i.e. scientifically oriented subjects. Engineers schooled in such an environment are confronted by difficulties in interpreting and using mathematical instrumentation in the complex tasks they encounter in practice. For this reason, various international institutions use highly simplified mathematical expressions when issuing the standards whose guidelines and instructions we follow. Such expressions have been derived under numerous assumptions, both physical and mathematical. This simplification of the physical picture is justified under certain circumstances, which are not frequently mentioned in the standards. Many standards were written at a time when the curricula in the majority of the countries in the world included more theoretical subjects and hours of mathematics. Engineers, as the users of these standards under such circumstances, are frequently not fully aware of the errors that are possible when using the expressions recommended by the standards for calculations under or outside boundary conditions. Moreover, a significant percentage of the international standards were written several decades ago, at a time when personal computers (PCs) were only available to small group of the engineering population. It has only been since August 1981 that IBM launched the personal computer on the market and launched the PC era. Today, twenty-five years later, when nearly every engineer in the developed world possesses a personal computer, it is not necessary to use mathematically simplified expressions for engineering calculations, which are only valid under very narrow limits of physical variables. This article provides a review of such an expression described by an international standard, IEEE Std. 81-1983 [1] for the interpretation of the results of the measurement of soil resistivity using the Wenner method. In order to determine the precision of the expression according to IEEE Std. 81-1983, a precise expression has been determined for the apparent resistivity of a two-layer soil model using the Wenner technique [2]. The error in predicting and interpreting apparent soil resistivity in several examples that can occur in practice was determined according to IEEE Std. 81-1983 and compared to the precise approach presented in this article. The results of both approaches are presented graphically and analytically, and are discussed.

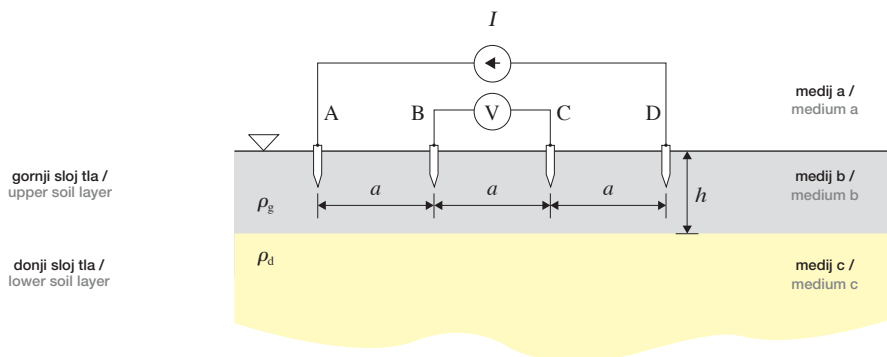


## 2 MJERENJE SPECIFIČNOG OTPORA TLA

Najčešće preporučivana i korištena mjerna tehnika električnog mjerenja specifičnog otpora tla je Wennerova metoda [2] (slika 1). Razlog rasprostranjenosti uporabe navedene mjerne tehnike je u jednostavnosti interpretacije mjernih rezultata [3] i [4].

## 2 MEASUREMENT OF SOIL RESISTIVITY

The most frequently recommended and used measurement technique for the electrical measurement of soil resistivity is the Wenner method [2] (Figure 1). The reason for the widespread use of this measurement technique is the simplicity of the interpretation of the measured results [3] and [4].



**Slika 1**  
Dvoslojno tlo i Wennerov raspored elektroda  
**Figure 1**  
Two-layer soil and the Wenner electrode arrangement

Navedena mjerna tehnika veoma je prikladna za određivanje parametara dvoslojnog tla. Postupak mjerenja obavlja se za tu namjenu specijaliziranim baterijski napajanim mjernim uređajem. Mjerni uređaj u sebi sadrži strujni izvor sinusno promjenjive struje kojemu je frekvencija različita od mrežne, tj. od 50/60 Hz, koja se ne podudara s mogućim harmonicima mreže, filter kojim se izdvaja izmjenični mjerni napon frekvencije strujnog izvora mjereno voltmetrom, a koji potiskuju ostale frekvencije te ampermetar.

This measurement technique is highly suitable for determining the parameters of two-layer soil. The measurement procedure is performed for this purpose using a specialized battery-operated measuring device. The measuring device consists of a sinusoidal current source of variable amplitude, the frequency of which differs from that of the mains frequency, i.e. 50/60 Hz and does not coincide with possible mains harmonics, a filter that separates alternating measuring voltage of the frequency of the current source measured by a voltmeter and attenuates other frequencies, and an amp meter.

### 3 STATIČKI MODEL STRUJNOG POLJA

Tumačenje dobivenih mjernih rezultata temelji se na statičkom modelu strujnog polja u tlu [5]. U tu svrhu koristi se tehnika odslikavanja izvora strujnih polja na granicama diskontinuiteta specifičnog električnog otpora tla (slika 2a). Utiskivanjem struje  $I$  kroz strujne elektrode u tlo, nastalo strujno polje u dvoslojnom tlu mora zadovoljiti rubne uvjete na granicama diskontinuiteta specifičnog električnog otpora: tlo-zrak, te gornjeg i donjeg sloja tla, a koji glase [5] i [6]:

$$n \times (\rho_a J_a - \rho_b J_b) = 0, \quad n \times (\rho_b J_b - \rho_c J_c) = 0 \quad (1)$$

$$n \cdot (J_a - J_b) = 0, \quad n \cdot (J_b - J_c) = 0. \quad (2)$$

gdje je:

- $n$  – vektor normale na granice diskontinuiteta specifičnog električnog otpora,
- $J_a$  – gustoća struje u mediju a (zrak) na granici diskontinuiteta specifičnog električnog otpora,
- $J_b$  – gustoća struje u mediju b (gornji sloj tla) na granici diskontinuiteta specifičnog električnog otpora i
- $J_c$  – gustoća struje u mediju c (donji sloj tla) na granici diskontinuiteta specifičnog električnog otpora.

Zrak (medij a) ima visok specifični električni otpor za koji se misli da može biti  $10^{18} \Omega\text{m}$ . Iz tog razloga može ga se gotovo bez ikakve pogreške smatrati izolatorom [7] i [8]. Poznavanje rubnih uvjeta (1) i (2) na granicama diskontinuiteta specifičnog električnog otpora omogućava matematičko rješavanje zadaće i određivanje potencijala na naponskim mjernim elektrodama (slika 1).

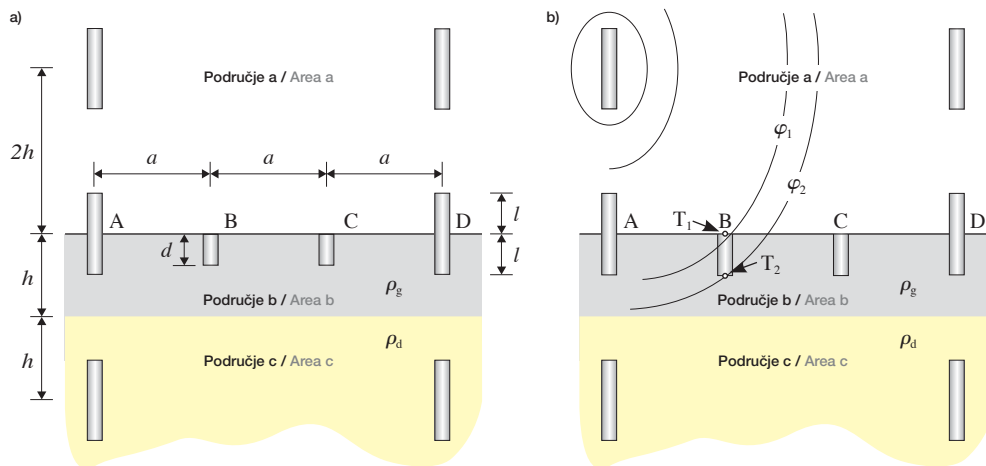
### 3 STATIC MODEL OF A CURRENT FIELD

Interpretation of the measurement results is based upon a static model of a current field in the soil [5]. For this purpose, the method of images is used to describe the discontinuity boundaries of soil resistivity (Figure 2a). The current field resulting from the injection of current  $I$  through the current electrodes in the two-layer soil must satisfy the boundary conditions at the discontinuity boundaries of resistivity: soil-air, the upper soil layer and the lower soil layer, as stated in [5] and [6]:

Where:

- $n$  – is the normal vector at the discontinuity boundary of resistivity,
- $J_a$  – is the current density in medium a (air) at the discontinuity boundary of resistivity,
- $J_b$  – is the current density in medium b (upper soil layer) at the discontinuity boundary of resistivity and
- $J_c$  – is the current density in medium c (lower soil layer) at the discontinuity boundary of resistivity.

Air (medium a) has high specific resistivity, and is thought to be  $10^{18} \Omega\text{m}$ . For this reason, it can be considered as an insulator, with practically no error [7] and [8]. Knowing the boundary conditions (1) and (2) at the discontinuity boundary of specific resistivity facilitates the mathematical solution of the task and the determination of the potential on the voltage measurement electrodes (Figure 1).



**Slika 2**  
Wennerov raspored elektroda, dvoslojno tlo i odslikavanje strujnih elektroda  
Figure 2  
Wenner electrode arrangement, two-layer soil images of current electrodes

Prema teoriji odslikavanja [5] izvori strujnog polja, tj. strujne elektrode A i D odslikavaju se od granica diskontinuiteta specifičnog električnog otpora. Prvo odslikavanje odvija se na granici tlo-zrak. Ukopani dio strujnih elektroda duljine  $l$  odslikava se od granice tlo-zrak, u elektrodi duljine  $l$ , a iz koje istječe jednaka struja kao iz originalne elektrode. S obzirom da jednaka struja istječe iz originalne elektrode i njezine slike u području a, te kako se one dodiruju na granici tlo-zrak, možemo ih za proračune u području b promatrati kao jednu cjelinu, tj. kao elektrodu dvostruke duljine  $2l$ , a iz koje istječe dvostruka struja. Tako nastali konglomerati originalnih strujnih elektroda A i D s njihovim slikama koje se nalaze u području a odslikavaju se od granice između gornjeg i donjeg sloja tla, tj. od granice između područja b i c u područje c. Novonastale slike nalaze se u području c (donji sloj tla), a središte slika štapnih elektroda udaljeno je od granice tlo-zrak za dvostruku debljinu gornjeg sloja tla, te iznosi  $2h$ . Iz ove slike elektrode A više ne istječe struja  $2I$ , nego  $\beta \cdot 2I$ , gdje je  $\beta$  koeficijent odslikavanja između područja b i c ( $\beta = (\rho_d - \rho_g) / (\rho_d + \rho_g)$ ).

U idućem koraku potrebno je odslikati zamišljene slike iz područja c u područje a. Odslikavanje iz područja c u područje a odvija se na granici tlo-zrak, a središta novonastalih zamišljenih slika u području a nalaze se na jednakoj udaljenosti od granice tlo-zrak, kao i zamišljene slike iz prethodnog koraka u području c, a koja odgovara dvostrukoj debljini gornjeg sloja tla te iznosi  $2h$ . U ovom slučaju odslikavanje iz područja c u područje a ne mijenja iznos struje koja istječe iz zamišljene elektrode u području a, jer je koeficijent odslikavanja jednak jedinici s obzirom da se područje a (zrak) može smatrati izolatorom. Tako dobivene zamišljene slike u području a (zrak) potrebno je ponovno odslikati od granice između gornjeg i do-

According to the method of images theory [5], the sources of the current field, i.e. current electrodes A and D are mirrored at the discontinuity boundary of resistivity. The first application of the method of images occurs at the soil-air boundary. The parts of the current electrodes buried in the soil of length  $l$  are mirrored at the soil-air boundary, in an electrode of length  $l$  from which equal current flows out as from the original electrode. Since equal current flows from the original electrode and its image in Area a, and since they touch the soil-air boundary, for calculations in Area b we can consider them to be a single entity, i.e. an electrode of double length  $2l$  from which double current flows. Thus, such conglomerates of original current electrodes A and D, with their images in Area a are by the method of images mirrored at the boundary between the upper and lower soil layers, i.e. from the boundary between Area b and Area c in Area c. The new images are located in Area c (lower soil layer) and the center of the image of the rod electrodes is at a distance from the soil-air boundary of two times the thickness of the upper soil layer, amounting to  $2h$ . Current  $\beta \cdot 2I$  instead of  $2I$  flows from this image of electrode A, where  $\beta$  is the reflection coefficient [1] (reflection factor [3]) between Areas b and c ( $\beta = (\rho_d - \rho_g) / (\rho_d + \rho_g)$ ).

In the next step, it is necessary to apply the method of images on the imaginary image in Area c to mirror them in Area a. Mirroring from Area c to Area a occurs at the soil-air boundary, and the centers of the new imaginary images in Area a are at the same distance from the soil-air boundary as the imaginary images from the previous step in Area c, which corresponds to a thickness twice that of the upper soil layer and equals  $2h$ . In this case, the mirroring from Area c to Area a does not alter the amount of current that flows from the imaginary electrode in Area a, because the reflection coefficient is equal to 1,

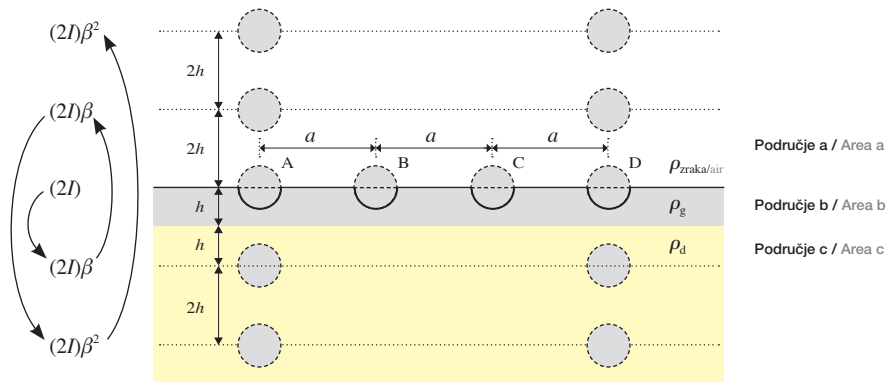
njeg sloja tla, tj. područja b i c u područje c, s koeficijentom odslikavanja  $\beta$ , te se takav postupak nastavlja unedogled. Prilikom svakog odslikavanja od granica diskontinuiteta električnih značajki (specifičnog električnog otpora tla) povećava se udaljenost novonastalih zamišljenih izvora polja od granice tlo-zrak te se njihova središta nalaze na udaljenosti od granice tlo-zrak  $h, 2h, 4h, \dots, 2nh$ , gdje je  $n$  redni broj zamišljene slike.

Za razliku od prikazanog odslikavanja u kojemu je očuvana stvarna geometrija strujnih izvora polja (elektrode A i D) prema slici 2a, u međunarodnoj normi IEEE Std. 81-1983 [1] navedeno odslikavanje je znatno pojednostavljeno. Naime, **prva pretpostavka** koja je učinjena u fizikalnom modelu norme IEEE Std. 81-1983, je zamjena štapnih elektroda s polukuglama, koje su se stopile sa svojom slikom iz područja a, koja je također polukugla, pa se daljnje odslikavanje provodi s kuglama (slika 3).

since Area a (air) can be considered as an insulator. Such obtained imaginary images in Area a (air) must be mirrored again from the boundary between the upper and lower soil layers, i.e. Areas b and c in Area c, with the reflection coefficient  $\beta$ , and such a procedure is continued indefinitely. On the occasion of every mirroring from the discontinuity boundary of soil resistivity, the distance increases between the new imaginary field sources and the soil-air boundary, and their centers are located at distances from the soil-air boundary of  $h, 2h, 4h, \dots, 2nh$  where  $n$  is the ordinal number of the imaginary image.

Unlike the mirroring presented in which the actual geometry of the current source fields (electrodes A and D) is according to Figure 2a, this mirroring is significantly simplified in the international IEEE Std. 81-1983 [1]. **The first assumption** in the physical model of IEEE Std. 81-1983 is the replacement of rod electrodes with hemispherical ones, which merge with their image from Area a, which is also a hemisphere, and further mirroring is conducted with spheres (Figure 3).

**Slika 3**  
Odslikavanje u dvoslojnom tlu ekvivalentnim kuglama i Wennerov raspored elektroda  
Figure 3  
Mirroring in two-layer soil with equivalent spheres and the Wenner electrode arrangement



Predstavljanjem štapnih (cilindričnih) elektroda strujnih mjernih sondi s kuglama omogućeno je korištenje izraza za potencijal u okolišu kugle, odnosno točkaste izvore polja, jer se potencijal određuje izvan ekvivalentne kugle. Izrazi za električni potencijal u prostoru oko točkastih izvora polja su matematički vrlo jednostavni. Zbog navedenog pojednostavljenja izraz za prividni specifični otpor tla prema IEEE normi Std. 81-1983 [1] je valjan ukoliko je dovoljno velik razmak između susjednih elektroda  $a$ . Naime, ukoliko je dovoljno velik razmak između elektroda  $a$ , tada su ekvipotencijalne krivulje koje su uzrokovane strujnim elektrodama cilindričnog oblika slične ekvipotencijalnim krivuljama točkastih izvora polja.

Presenting the rod (cylindrical) electrodes of current measuring probes with spheres permits the use of the expression for potential in the sphere vicinity, i.e. field point sources, because the potential is determined outside the equivalent sphere. Expressions for electric potential around the point sources are mathematically very simple. Therefore, the cited simplified expression for apparent soil resistivity according to IEEE Std. 81-1983 [1] is valid if there are sufficiently large spaces between the neighboring electrodes  $a$ . If there is a sufficiently large space between electrodes  $a$ , the equipotential curves that are caused by cylindrical current electrodes are similar to the equipotential curves of the point sources.

Ekvipotencijalne krivulje kojeg uzrokuju cilindrične elektrode su oblika elipse, a ukoliko je točka promatranja daleko od elektrode ekvipotencijalna krivulja koja prolazi kroz nju je približno kružnog oblika, što odgovara točkastom izvoru polja (slika 2b). Iz navedenog je jasan fizikalni smisao pojednostavljenja, ali ne i utjecaj navedenog pojednostavljenja na pogrešku pri određivanju specifičnog otpora tla, pogotovo u slučaju kada su mjerne elektrode relativno blizu jedna drugoj. Da bi se dobio odgovor na ovo pitanje potrebno je odrediti izraz za prividni specifični otpor tla mjeren Wennerovim spojem u kojemu su mjerne elektrode modelirane kao štapovi (tanki cilindri). Zatim je na nekoliko primjera iz prakse određena pogreška koja nastaje zbog modeliranja štapnih elektroda s kuglama te utjecaj blizine elektroda na mjerenje.

#### 4 ODREĐIVANJE TOČNOG IZRAZA ZA PRIVIDNI SPECIFIČNI OTPOR TLA

Postupak određivanja točnog izraza za prividni specifični električni otpor tla sastoji se od nekoliko koraka. U prvom koraku potrebno je pronaći neki jednostavniji izraz uz pomoć kojega se lako određuje potencijal u okolini štapne elektrode iz koje istječe struja  $I$ , kada se ona nalazi u neograničenom mediju. U drugom koraku potrebno je uvažiti utjecaj granice tlo-zrak korištenjem tehnike odslikavanja, te određivanje izraza za skalarni električni potencijal na mjestu jedne od naponskih mjernih elektroda. Treći korak sastoji se od uvažavanja još jedne granice diskontinuiteta specifičnog električnog otpora tla, a koja se nalazi ispod gornjeg sloja tla. Kao i u prethodnom koraku primjenom tehnike odslikavanja, potrebno je odrediti potencijal u gornjem sloju tla (područje b) na mjestu jedne od naponskih mjernih elektroda. U posljednjem koraku na temelju prethodno određenih izraza potrebno je odrediti izraz za prividni specifični električni otpor dvoslojnog tla mjerne Wennerovim rasporedom elektroda (slika 1).

Skalarni električni potencijal u okolini štapne elektrode konačne duljine  $l$  iz koje istječe struja  $I$ , a koji se nalazi u neograničenom mediju specifičnog otpora  $\rho_g$  prikazan slikom 4a prema [5] glasi:

$$\varphi(x, y) = \frac{l\rho_g}{4\pi l} \ln \frac{x+c+\sqrt{(x+c)^2+y^2}}{x-c+\sqrt{(x-c)^2+y^2}}, \quad (3)$$

Equipotential curves caused by cylindrical electrodes are in the form of an ellipse, and if the observation point is distant from the electrode, the equipotential curve that passes through it is approximately round in shape, which corresponds to the point source (Figure 2b). Therefore, the physical purpose of simplification is clear but not the impact of this simplification on the error in determining soil resistivity, especially when measurement electrodes are relatively close to each other. In order to obtain an answer to this question, it is necessary to define an expression for apparent soil resistivity measured by the Wenner method in which the measurement electrodes are modeled as rods (thin cylinders). In several actual examples, errors were determined that occurred due to modeled rod electrodes with spheres and the influence of the vicinity of the electrodes upon measurement.

#### 4 DEFINITION OF A PRECISE EXPRESSION FOR APPARENT SOIL RESISTIVITY

The procedure for defining a precise expression for apparent soil resistivity consists of several steps. In the first step, it is necessary to find a simpler expression with the help of which potential can be easily defined in the vicinity a rod electrode from which current  $I$  flows, when it is in an infinite medium. In the second step, it is necessary to take into account the influence of the soil-air boundary by using the method of images and the determination of an expression for electrical scalar potential on the site of one of the voltage measurement electrodes. The third step consists of taking into account one more discontinuity boundary of soil resistivity, which is found below the upper soil layer. As in the previous step in the applied method of images, it is necessary to define the potential in the upper soil layer (Area b) at the site of one of the voltage measurement electrodes. In the final step, based on the previously defined expressions, it is necessary to define an expression for the apparent resistivity of two-layer soil measured using the Wenner electrode arrangement (Figure 1).

The electrical scalar potential in the vicinity of a rod electrode of the final length  $l$ , from which current  $I$  flows, located in an infinite medium of resistivity  $\rho_g$  shown in Figure 4a according to [5], is as follows:

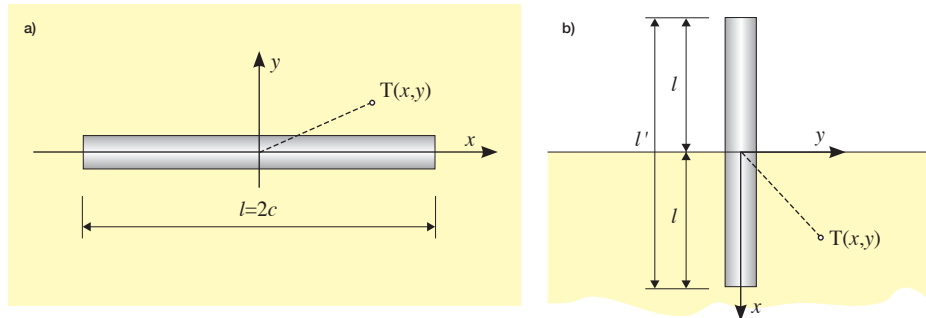
gdje je:

- $I$  – struja koja istječe iz površine vodiča (A),
- $\rho_g$  – specifični električni otpor gornjeg sloja tla ( $\Omega\text{m}$ ),
- $l$  – duljina vodiča elektrode (m),
- $c$  – pola duljine vodiča strujne elektrode ( $l=2c$ ).

where:

- $I$  – the current that flows from the conductor surface (A),
- $\rho_g$  – the resistivity of the upper soil layer ( $\Omega\text{m}$ ),
- $l$  – the length of the electrode (m),
- $c$  – half the length of the current electrode ( $l=2c$ ) (m).

**Slika 4**  
Ravni štap i  
relevantna geometrija  
Figure 4  
Straight rod and the  
relevant geometry



Stapanjem strujne elektrode duljine  $l$  s njezinom slikom novonastala elektroda ima duljinu  $l'=2l$  (slika 4b), a ukupna struja koja istječe iz nastalog konglomerata iznosi  $I=2I$ , te je potencijal u okolini takve elektrode prema slici 4b za  $x>0$  dan izrazom:

With the merging of a current electrode of the length  $l$  with its image, the new electrode has the length of  $l'=2l$  (Figure 4b), and the total current that flows from the new conglomerate amounts to  $I=2I$ , and the potential in the vicinity of such an electrode according to Figure 4b for  $x>0$  is given with the following expression:

$$\varphi(x,y) = \frac{(2I)\rho_g}{4\pi l'} \ln \frac{x+l'/2 + \sqrt{(x+l'/2)^2 + y^2}}{x-l'/2 + \sqrt{(x-l'/2)^2 + y^2}} = \frac{I\rho_g}{4\pi l} \ln \frac{x+l + \sqrt{(x+l)^2 + y^2}}{x-l + \sqrt{(x-l)^2 + y^2}} \quad (4)$$

Naravno, pod duljinom elektrode koja se odslila od granice tlo-zrak **razmatra se samo ukopani dio strujne elektrode u tlu** (ono što je izvor polja). Potencijal na mjestu naponske elektrode B zbog istjecanja struje iz strujne elektrode A stopljene sa svojom slikom koja se nalazi u području a (slika 4b), i utjecanja struje u strujnu elektrodu D stopljene sa svojom slikom koja se nalazi u području a (slika 4b), u točki  $T_1$  (slika 2b) u jednoslojnom tlu iskazan geometrijom mjernog spoja glasi:

Naturally, along the length of the electrode that is mirrored at the soil-air boundary, **only the part of the electrode buried in the soil is considered** (that which is the source of the field). The potential at the site of voltage electrode B due to the flow of current from current electrode A merged with its image that is located in Area a (Figure 4b), and the inflow of current in electrode D merged with its image that is located in Area a (Figure 4b), at point  $T_1$  (Figure 2b) in one layer soil is expressed by the geometry of the measurement circuit, as follows:

$$\varphi_B = \frac{I\rho_g}{4\pi l} \ln \left( \frac{l + \sqrt{l^2 + a^2}}{-l + \sqrt{l^2 + a^2}} \cdot \frac{-l + \sqrt{l^2 + (2a)^2}}{l + \sqrt{l^2 + (2a)^2}} \right) \quad (5)$$

Zbog simetrije potencijal elektrode C suprotnog je predznaka od potencijala elektrode B, te vrijedi:  $\varphi_C = -\varphi_B$ . Potencijal  $\varphi_B$ , odnosno potencijal  $\varphi_C$  određeni su na uzdužnim osima naponskih mjernih elektroda B i C u točki koja dodiruje granicu tlo-zrak (slika 2b). Međutim, treba imati na umu da potencijal treba odrediti metodom srednjeg potencijala, jer se prema izrazu (4) potencijal mijenja duž uzdužne osi naponske elektrode. Naočigled je ova konstatacija zbunjujuća, jer se sve točke na idealnom vodiču pri elektrostatskim uvjetima nalaze na jednakom potencijalu. Da bi sve točke vodiča naponskih elektroda bile na jednakom potencijalu, bilo bi potrebno vršiti odslikavanje od cilindrične granice, tj. strujnih elektroda od površine naponskih elektroda. Međutim, kako je duljina naponskih mjernih elektroda konačna, takvo odslikavanje je teško provedivo. Zanimarivanjem odslikavanja strujnih elektroda od naponskih mjernih elektroda, vodiči naponskih mjernih elektroda presijecaju različite ekvipotencijalne krivulje uzrokovanih strujnim elektrodama (slika 2b). Iako su sve točke na idealnom vodiču u statičkom polju na jednakom potencijalu, matematički nije jednostavno odrediti iznos tog potencijala. U takvim slučajevima ukoliko je moguće koristi se **metoda srednjeg potencijala**. Srednja vrijednost potencijala predstavlja nepristranu procjenu potencijala na kojemu se nalazi vodič naponske mjerne elektrode.

Uzmimo da je duljina strujnih mjernih elektroda  $l$ , a naponskih mjernih elektroda  $d$  (slika 2a).

Tada srednji potencijal na mjestu naponske elektrode B zbog struje konglomerata elektrode A i njezine slike u području a, te konglomerata strujne elektrode D i njezine slike u području a glasi:

$$\bar{\varphi}_B = \frac{1}{d} \int_0^d \varphi(x, y = a) dx. \quad (6)$$

Srednji potencijal elektrode B zbog struja konglomerata originalne elektrode A, koja se nalazi u području b i njezine zamišljene slike koja se nalazi u području a, te konglomerata originalne elektrode D, koja se nalazi u području b i njezine zamišljene slike koja se nalazi u području a glasi:

$$\bar{\varphi}_B = \frac{I\rho_s}{4\pi ld} \int_0^d \left( \ln \frac{x+l+\sqrt{(x+l)^2+a^2}}{x-l+\sqrt{(x-l)^2+a^2}} - \ln \frac{x+l+\sqrt{(x+l)^2+(2a)^2}}{x-l+\sqrt{(x-l)^2+(2a)^2}} \right) dx. \quad (7)$$

Due to the symmetry, the potential of electrode C is opposite to that of the of the potential of electrode B, as follows:  $\varphi_C = -\varphi_B$ . Potential  $\varphi_B$ , or potential  $\varphi_C$  are defined along the axes of voltage measurement electrodes B and C at the points that touch the soil-air boundary (Figure 2b). However, it is necessary to bear in mind that the potential should be determined by the mean potential method, because according to Expression (4), the potential changes along the length of the axis of the voltage electrode. Apparently this statement is confusing because all the points on the ideal conductor under electrostatic conditions are located at the same potential. In order for all the points on voltage electrodes to be at the same potential, it would be necessary to perform the method of images from the cylindrical boundary, i.e. current electrodes from the surface of the voltage electrodes. However, since the length of the voltage measurement electrodes is finite, in such case it is difficult to perform the method of images. By ignoring the image of the current electrodes from the voltage measurement electrodes, the buried part (conductor) of the voltage measurement electrodes intersect with various equipotential curves caused by the current electrodes (Figure 2b). Although all the points on an ideal conductor in a static field are of an equal potential, mathematically it is not simple to determine the value of this potential. In such cases, insofar as possible, the mean potential method is used. The **mean potential value** represents an unbiased assessment of the potential of the buried part of the voltage measurement electrode.

Let us say that the length of the current measurement electrodes is  $l$  and the voltage measurement electrodes is  $d$  (Figure 2a).

Then the mean potential at the site of the voltage electrode B due to the current conglomerate of electrode A and its image in Area a, and the conglomerate of current electrode D and its image in Area a is as follows:

The mean potential of electrode B, due to the currents from conglomerates of the original electrode A, which is located in Area b and its imaginary image that is located in Area a, and the conglomerates of the original electrode D, which is located in Area b and its imaginary image that is located in Area a, is as follows:

Umjesto rješavanja integrala u izrazu (7), za kojeg postoji analitičko rješenje, prikladnije je ishoditi numeričko rješenje, tj. provesti numeričku integraciju. Kako je podintegralna funkcija glatka funkcija, umjesto složenijih postupaka numeričkih integracija (Trapezno pravilo, Simpsonovo pravilo, Romberg) prikladnije je provesti jednostavnu integraciju prema pravokutnom pravilu [9]:

Instead of solving the integral in Expression (7), for which there is an analytical solution, it is more appropriate to obtain a numerical solution, i.e. to perform numerical integration. Since the subintegral function is a smooth function, instead of more complex procedures of numerical integration (the trapezoidal, Simpson and Romberg rules), it is more appropriate to perform a simple integration according to the rectangular rule [9]:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \frac{x_2 - x_1}{M} \sum_{m=1}^M f(x_1 + m \cdot \Delta) + O(\Delta), \quad \Delta = \frac{x_2 - x_1}{M}, \quad (8)$$

gdje je:

- $\Delta$  – korak tj., prostorna udaljenost između dvije susjedne točke u kojima se uzima uzorak funkcije  $f(x)$ , a koji se nalazi na krivulji integriranja,  $x_1$  i  $x_2$  početna i krajnja točka duž krivulje na kojoj se integrira funkcija  $f(x)$ ,
- $O(\Delta)$  – numerička pogreška integracije, tj. odstupanje od točne vrijednosti integrala,
- $M$  – broj uzoraka funkcije na intervalu između točaka  $x_1$  i  $x_2$ .

Naravno, zbog jednostavnije sheme numeričkog integriranja potreban je nešto veći broj uzoraka  $M$  funkcije  $f(x)$ , ali je iskazivanje rješenja analitičkim izrazom olakšano.

Primjenom izraza (8) na izraz (7) srednji potencijal elektrode B zbog konglomerata originalnih strujnih elektroda A i D, koje se nalaze u području b i njihovih zamišljenih slika koje se nalaze u području a glasi:

where:

- $\Delta$  – step, i.e. the spatial distance between two neighboring points in which a sample of function  $f(x)$  is taken, which is on the integration curve,  $x_1$  and  $x_2$  the initial and final points along the curve on which the function  $f(x)$  is integrated,
- $O(\Delta)$  – the numerical integration error, i.e. the deviation from the precise value of the integral,
- $M$  – the number of the samples of the function between points  $x_1$  and  $x_2$ .

Naturally, due to the simpler scheme of numerical integration, a somewhat larger number of samples of the  $M$  function  $f(x)$  are required, but the presentation of the solution is easier with the analytical expression.

By applying Expression (8) to Expression (7), the mean potential of electrode B, due to the conglomerate of the original current electrodes A and D, which are located in Area b and their imaginary images that are located in Area a, is as follows:

$$\bar{\varphi}_B^{ab} = \frac{I \rho_e}{4 \pi l} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \ln \left( \frac{\Delta m + l + \sqrt{(x+l)^2 + a^2}}{\Delta m - l + \sqrt{(x-l)^2 + a^2}} \cdot \frac{\Delta m - l + \sqrt{(x-l)^2 + (2a)^2}}{\Delta m + l + \sqrt{(x+l)^2 + (2a)^2}} \right), \quad (9)$$

gdje je korak  $\Delta$  duž osi naponske mjerne elektrode B dan izrazom:

where step  $\Delta$  along the axis of the voltage measurement electrode B is given with the following expression:

$$\Delta = \frac{d}{M-1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1, \quad (10)$$



u kojemu je:

- $d$  – duljina ukopanog dijela naponske mjerne elektrode B,
- $M$  – broj uzoraka, tj. točaka promatranja potencijala, a koje se nalaze na uzdužnoj osi ukopanog dijela naponske elektrode B.

U dvoslojnom tlu situacija je nešto složenija, jer na potencijal naponske mjerne elektrode utječu zamišljene slike zbog višestrukih odslikavanja, a koje se nalaze u područjima a i c. Utjecaj slika strujnih elektroda A i D u područjima a i c može se uvažiti neovisno te se u konačnom izrazu za potencijal algebarski zbrajaju zajedno s potencijalom određenim izrazom (9). Srednji potencijal zbog slika iz područja a prema izrazu (8) iznosi:

in which:

- $d$  – the length of the buried part of voltage measurement electrode B,
- $M$  – the number of samples, i.e. the points in which potential is observed, which are located on the longitudinal axis of the buried part of charge electrode B.

In two-layer soil, the situation is somewhat more complex because the potential of the voltage measurement electrode is influenced by the imaginary image due to multiple image sources, which are located in Areas a and c. The influence of the images of the current electrodes A and D in Areas a and c can be considered independently and in the final expression for the potential, they are summed algebraically together with the potential defined by Expression (9). The mean potential due to the image from Area a according to Expression (8) is as follows:

---

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{d} \int_{2nh}^{2nh+d} \varphi(x, y) dx, \text{ tj. } \bar{\varphi} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \varphi(x = 2nh + \Delta m, y) \quad (11)$$

---

Srednji potencijal zbog zamišljenih slika iz područja c prema izrazu (8) iznosi:

The mean potential due to the imaginary images from Area c according to Expression (8) is as follows:

---

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{d} \int_{2nh-d}^{2nh} \varphi(x, y) dx, \text{ tj. } \bar{\varphi} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \varphi(x = 2nh - d + \Delta m, y), \quad (12)$$

---

ili prema:

or according to:

---

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \varphi(x = 2nh - \Delta m, y). \quad (13)$$

---

Da bi se mogao odrediti izraz za srednji potencijal naponskih mjernih elektroda prema posljednjim izrazima potrebno je odrediti analitički oblik izraza za potencijal  $\varphi(x, y)$  u dvoslojnom tlu za područje b, u kojemu se nalaze naponske mjerne elektrode, a zbog odslikanih strujnih elektroda A i D, koje se nalaze u područjima a i c. Potencijal u području b, na granici tlo-zrak na mjestu naponske mjerne elektrode B u točki  $T_1$  prema slici 2b, a zbog uvažanih  $N$  slika strujnih elektroda A i D koje se nalaze u području a glasi:

In order to define the expression for the mean potential of the voltage measurement electrodes according to the previous expressions, it is necessary to define the analytical form of the expression for potential  $\varphi(x, y)$  in two-layer soil for Area b, in which the voltage measurement electrodes are located, and due to the images of current electrodes A and D, which are located in Areas a and c. The potential in Area b, at the soil-air boundary at the site of the voltage measurement electrode B in point  $T_1$  according to Figure 2b, and due to  $N$  images of the current electrodes A and D that are located in Area a, which are taken into consideration, is as follows:

$$\varphi_b^a = \frac{I\rho_g}{4\pi l} \sum_{n=1}^N \beta^n \left( \begin{array}{c} \ln \frac{(2nh+l) + \sqrt{(2nh+l)^2 + a^2}}{(2nh-l) + \sqrt{(2nh-l)^2 + a^2}} + \\ \ln \frac{(2nh-l) + \sqrt{(2nh-l)^2 + (2a)^2}}{(2nh+l) + \sqrt{(2nh+l)^2 + (2a)^2}} \end{array} \right). \quad (14)$$

Potencijal u području b, na granici tlo-zrak na mjestu naponske mjerne elektroda B zbog slika strujnih elektroda A i D, koje se nalaze u području c glasi:

The potential in Area b, at the soil-air boundary at the site of voltage measurement electrode B due to the images of the current electrodes A and D, which are located in Area c, is as follows:

$$\varphi_b^c = \frac{I\rho_g}{4\pi l} \sum_{n=1}^N \beta^n \ln \left( \frac{(2nh+l) + \sqrt{(2nh+l)^2 + a^2}}{(2nh-l) + \sqrt{(2nh-l)^2 + a^2}} \cdot \frac{(2nh-l) + \sqrt{(2nh-l)^2 + (2a)^2}}{(2nh+l) + \sqrt{(2nh+l)^2 + (2a)^2}} \right). \quad (15)$$

Kao što se to može zapaziti izrazi (14) i (15) su identični, jer je potencijal određen u točki na granici tlo-zrak. Međutim, kada se potencijal određuje u bilo kojoj drugoj točki unutar područja b izrazi (14) i (15) će se razlikovati. Prema slici 2b izrazi (14) i (15) odnose se na potencijal u točki  $T_1$ . Ukoliko se prema navedenim izrazima potencijal određuje u točki  $T_2$ , tada je izraze (14) i (15) potrebno modificirati. U izrazu (14) umjesto  $2nh+l$  treba pisati  $2nh+l+d$ , a umjesto  $2nh-l$  treba pisati  $2nh-l+d$ . U izrazu (15) umjesto  $2nh+l$  treba pisati  $2nh+l-d$ , a umjesto  $2nh-l$  treba pisati  $2nh-l-d$ . Na temelju iznesene logike razmišljanja dolazi se do izraza za srednje potencijale elektrode B zbog slika strujnih elektroda A i D, koje se nalaze u područjima a i c, koji glase:

As can be observed, Expressions (14) and (15) are identical because the potential is defined at the point at the soil-air boundary. However, when the potential is defined at any other point within Area b, Expressions (14) and (15) will differ. According to Figure 2b, Expressions (14) and (15) refer to the potential at point  $T_1$ . If according to the cited expressions the potential is defined at point  $T_2$ , then Expressions (14) and (15) must be modified. In Expression (14), instead of  $2nh+l$  it is necessary to write  $2nh+l+d$ , and instead of  $2nh-l$  it is necessary to write  $2nh-l+d$ . In Expression (15), instead of  $2nh+l$  it is necessary to write  $2nh+l-d$ , and instead of  $2nh-l$  it is necessary to write  $2nh-l-d$ . Based upon the logic presented, the expression is obtained for the mean potential of electrode B due to the images of the current electrodes A and D, which are located in Areas a and c, as follows:

$$\bar{\varphi}_b^a = \frac{K}{M} \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^{M-1} \beta^n \left( \begin{array}{c} \ln \frac{2nh + \Delta m + l + \sqrt{(2nh + \Delta m + l)^2 + a^2}}{2nh + \Delta m - l + \sqrt{(2nh + \Delta m - l)^2 + a^2}} + \\ \ln \frac{2nh + \Delta m - l + \sqrt{(2nh + \Delta m - l)^2 + (2a)^2}}{2nh + \Delta m + l + \sqrt{(2nh + \Delta m + l)^2 + (2a)^2}} \end{array} \right), \quad (16)$$

$$\bar{\varphi}_b^c = \frac{K}{M} \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^{M-1} \beta^n \ln \left( \begin{array}{c} \frac{2nh - \Delta m + l + \sqrt{(2nh - \Delta m + l)^2 + a^2}}{2nh - \Delta m - l + \sqrt{(2nh - \Delta m - l)^2 + a^2}} \cdot \\ \frac{2nh - \Delta m - l + \sqrt{(2nh - \Delta m - l)^2 + (2a)^2}}{2nh - \Delta m + l + \sqrt{(2nh - \Delta m + l)^2 + (2a)^2}} \end{array} \right). \quad (17)$$

u kojima je  $K=I\rho_g/4\pi l$ , a korak  $\Delta$  određen izrazom (10).

in which  $K=I\rho_g/4\pi l$ , and step  $\Delta$  is defined by Expression (10).

Ukupni srednji potencijal zbog zamišljenih slika elektroda A i D koje se nalaze u područjima a i c te konglomerata strujnih elektroda A i D s njihovom slikama koje se nalaze području a, jednak je zbroju srednjih potencijala  $\bar{\varphi}_a^c$  i  $\bar{\varphi}_B^c$  sa  $\bar{\varphi}_B^b$ . Takav bi izraz zbog svoje duljine postao nepregledan, a ujedno ne bi bio prilagođen za pisanje programa za računalo korištenjem programskih petlji. Naime, treba imati na umu da **izraz treba svesti na takvu formu koja je prikladna za pisanje programa na računalu**, pogotovo za korištenje programskih petlji.

Srećom, moguće je napisati jezgrovitiji izraz za srednji potencijal zbog slika iz područja a i c, a koji je istodobno prikladan za pisanje programa za osobno računalo (PC) te on glasi:

The total mean potential due to the imaginary images of electrodes A and D in Areas a and c and the conglomerate of current electrodes A and D with their images located in Area a, is equal to the sum of the mean potentials  $\bar{\varphi}_a^c$  and  $\bar{\varphi}_B^c$  with  $\bar{\varphi}_B^b$ . Due to the length of such an expression, it is not easy to comprehend and would not be suitable for writing programs for a computer using program loops. It is necessary to bear in mind that **an expression must be reduced to a form that is suitable for writing programs on a computer**, especially for using program loops.

Fortunately, it is possible to write a more concise expression for mean potential due to the images from Areas a and c, which at the same time is suitable for writing programs for a personal computer, as follows:

$$\bar{\varphi}_n^c = \frac{K}{M} \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=0}^1 \beta^k \left( \begin{array}{l} \ln \frac{2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k + l + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k + l)^2 + a^2}}{2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k - l + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k - l)^2 + a^2}} + \\ \ln \frac{2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k - l + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k - l)^2 + (2a)^2}}{2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k + l + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k + l)^2 + (2a)^2}} \end{array} \right) \quad (18)$$

Kratkim osvrtom na prethodni izraz uočavaju se slični članovi u razlomku pod logaritmom, što otvara mogućnost daljnjeg sažimanja dobivenog izraza na još jezgrovitiji oblik:

Briefly reviewing the previous expression, it is evident that there are similar articles in the fraction under the logarithm, thereby opening the possibility for further reduction of the expression obtained into an even more concise form:

$$\bar{\varphi}_n^c = \frac{K}{M} \sum_{n=1}^N \beta^k \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=0}^1 \ln \prod_{l=0}^1 \frac{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k + (-1)^l l) + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k + (-1)^l l)^2 + 2^l a^2}}{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k - (-1)^l l) + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k - (-1)^l l)^2 + 2^l a^2}} \quad (19)$$

Ukoliko se u konačnom izrazu za potencijal namjerava koristiti jednadžba za srednji potencijal u obliku prikazanom jednadžbom (19), tada je jednadžbu (9) potrebno svesti na takav oblik, tj.:

If it is intended to use an equation for the mean potential in the form presented by equation (19) in the final expression for potential, then Expression (9) must be reduced to such a form, i.e.:

$$\bar{\varphi}_n = \frac{K}{M} \sum_{n=1}^N \ln \prod_{l=0}^1 \frac{\Delta \cdot m + (-1)^l l + \sqrt{(\Delta \cdot m + (-1)^l l)^2 + 2^l a^2}}{\Delta \cdot m - (-1)^l l + \sqrt{(\Delta \cdot m - (-1)^l l)^2 + 2^l a^2}} \quad (20)$$

Ukupni srednji potencijal naponske mjerne elektrode B iznosi:

The total mean potential of the voltage measurement electrode B amounts to:

$$\bar{\varphi}_n = \frac{K}{M} \sum_{n=1}^N \left[ \ln \prod_{l=0}^1 \frac{\Delta \cdot m + (-1)^l l + \sqrt{(\Delta \cdot m + (-1)^l l)^2 + 2^l a^2}}{\Delta \cdot m - (-1)^l l + \sqrt{(\Delta \cdot m - (-1)^l l)^2 + 2^l a^2}} + \sum_{k=0}^1 \beta^k \sum_{m=0}^{M-1} \ln \prod_{l=0}^1 \frac{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k + (-1)^l l) + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k + (-1)^l l)^2 + 2^l a^2}}{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k - (-1)^l l) + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k - (-1)^l l)^2 + 2^l a^2}} \right] \quad (21)$$

Kako je zbog geometrijske i električne simetrije (slika 2a) potencijal elektrode C suprotnog predznaka od potencijala elektrode B, a time i srednji potencijal, tj.  $\bar{\varphi}_C = -\bar{\varphi}_B$ , napon  $\bar{U}_{BC}$  između naponskih elektroda B i C, mjereno voltmetrom (slika 1) iznosi  $\bar{U}_V = \bar{U}_{BC} = 2\bar{\varphi}_B$ , a iskazan geometrijom mjernog spoja glasi:

Since due to geometric and electrical symmetry (Figure 2a), the potential of electrode C is of the opposite sign of the potential of electrode B, and thereby the mean potential, i.e.  $\bar{\varphi}_C = -\bar{\varphi}_B$ , then voltage  $\bar{U}_{BC}$  between voltage electrodes B and C measured with a voltmeter (Figure 1) amounts to  $\bar{U}_V = \bar{U}_{BC} = 2\bar{\varphi}_B$ , and expressed by the geometry of the measurement circuit is as follows:

$$\bar{U}_{BC} = \frac{2K}{M} \sum_{m=1}^{M-1} \left[ \ln \prod_{l=0}^l \frac{\Delta \cdot m + (-1)^l l + \sqrt{(\Delta \cdot m + (-1)^l l)^2 + 2^l a^2}}{\Delta \cdot m - (-1)^l l + \sqrt{(\Delta \cdot m - (-1)^l l)^2 + 2^l a^2}} + \sum_{n=1}^N \beta^n \sum_{l=0}^l \ln \prod_{i=0}^i \frac{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^i + (-1)^l l) + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^i + (-1)^l l)^2 + 2^l a^2}}{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^i - (-1)^l l) + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^i - (-1)^l l)^2 + 2^l a^2}} \right] \quad (22)$$

Ukoliko je iz nekog razloga prikladnija proširenija forma, napon  $\bar{U}_{BC}$  glasi:

If for some reason an expanded form is more suitable,  $\bar{U}_{BC}$  is as follows:

$$\bar{U}_{BC} = \frac{2K}{M} \sum_{m=1}^{M-1} \left[ \sum_{l=0}^l \beta^l \ln \frac{\frac{\Delta \cdot m + l + \sqrt{(x+l)^2 + a^2}}{\Delta \cdot m - l + \sqrt{(x-l)^2 + a^2}} \cdot \frac{\Delta \cdot m - l + \sqrt{(x-l)^2 + (2a)^2}}{\Delta \cdot m + l + \sqrt{(x+l)^2 + (2a)^2}} + \sum_{n=1}^N \beta^n \ln \frac{2nh + \Delta \cdot m + l + \sqrt{(2nh + \Delta \cdot m + l)^2 + a^2}}{2nh + \Delta \cdot m - l + \sqrt{(2nh + \Delta \cdot m - l)^2 + a^2}} \cdot \frac{2nh + \Delta \cdot m - l + \sqrt{(2nh + \Delta \cdot m - l)^2 + (2a)^2}}{2nh + \Delta \cdot m + l + \sqrt{(2nh + \Delta \cdot m + l)^2 + (2a)^2}} + \sum_{l=0}^l \beta^l \ln \frac{2nh - \Delta \cdot m + l + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m + l)^2 + a^2}}{2nh - \Delta \cdot m - l + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m - l)^2 + a^2}} \cdot \frac{2nh - \Delta \cdot m - l + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m - l)^2 + (2a)^2}}{2nh - \Delta \cdot m + l + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m + l)^2 + (2a)^2}} \right] \quad (23)$$

Jednom određen napon  $U_{BC} = \bar{U}_{BC}$  iskazan geometrijom mjernog spoja omogućava određivanje izraza za prividni specifični električni otpor  $\rho(a)$  za svaku pojedinu mjernu tehniku, tj. raspored elektroda. Prividni specifični otpor tla  $\rho(a)$  iskazan geometrijskim faktorom  $F$  po definiciji glasi:

Once voltage  $U_{BC} = \bar{U}_{BC}$  is determined, expressed by the geometry of the measurement circuit, it is possible to determine an expression for apparent soil resistivity  $\rho(a)$  for each individual measurement technique, i.e. electrode arrangement. Apparent soil resistivity  $\rho(a)$  expressed by the geometric factor  $F$  is by definition as follows:

$$\rho(a) = \frac{U_V}{I} \frac{1}{F} = \frac{U_{BC}}{I} \frac{1}{F} \quad (24)$$

Kada je tlo homogeno, tada prividni specifični otpor tla  $\rho(a)$  ne ovisi o razmaku elektroda, te je on jednak specifičnom otporu tla gornjeg sloja tla, tj.  $\rho(a) = \rho_g$ , odnosno vrijedi:

When the soil is homogeneous, the apparent soil resistivity  $\rho(a)$  does not depend upon the distance between the electrodes and is equal to the soil resistivity of the upper soil layer, i.e.  $\rho(a) = \rho_g$ , or:

$$\rho(a) = \rho_g = \frac{U_{BC}}{I} \frac{1}{F} \quad (25)$$

Odatle je:

Thus:

$$F = \frac{1}{\rho_g} \frac{U_{BC}}{I} \quad (26)$$

Kada je specifični električni otpor gornjeg sloja tla  $\rho_g$  jednak specifičnom električnom otporu donjeg sloja tla  $\rho_d$  tada je koeficijent odslikavanja  $\beta$  jednak nuli. Tada u jednadžbi (22) za napon  $U_{BC}$  otpada član uz  $\beta$ , te se dobiva izraz za napon  $\bar{U}_{BC}$  kada je tlo jednoslojno te on glasi:

When the specific resistivity of the upper soil layer  $\rho_g$  equals the resistivity of the lower soil layer  $\rho_d$ , the reflection coefficient (reflection factor)  $\beta$  equals zero. Thus, in equation (22) for voltage  $U_{BC}$  the article next to  $\beta$  is eliminated and the expression  $\bar{U}_{BC}$  is obtained for a one-layer soil, as follows:

$$\bar{U}_{BC} = \frac{2K}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \ln \prod_{i=0}^1 \frac{\Delta \cdot m + (-1)^i l + \sqrt{(\Delta \cdot m + (-1)^i l)^2 + 2^i a^2}}{\Delta \cdot m - (-1)^i l + \sqrt{(\Delta \cdot m - (-1)^i l)^2 + 2^i a^2}} \quad (27)$$

Uvrštavanjem dobivenog izraza (27) u jednadžbu (26) dobiva se:

By including the obtained Expression (27) in Expression (26), the following is obtained:

$$F = \frac{1}{2\pi l} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \ln \prod_{i=0}^1 \frac{\Delta \cdot m + (-1)^i l + \sqrt{(\Delta \cdot m + (-1)^i l)^2 + 2^i a^2}}{\Delta \cdot m - (-1)^i l + \sqrt{(\Delta \cdot m - (-1)^i l)^2 + 2^i a^2}} \quad (28)$$

ili u obliku:

or in the following form:

$$F^{-1} = 2\pi l \cdot M \left( \sum_{m=0}^{M-1} \ln \prod_{i=0}^1 \frac{\Delta \cdot m + (-1)^i l + \sqrt{(\Delta \cdot m + (-1)^i l)^2 + 2^i a^2}}{\Delta \cdot m - (-1)^i l + \sqrt{(\Delta \cdot m - (-1)^i l)^2 + 2^i a^2}} \right)^{-1} = 2\pi l \cdot M \cdot C^{-1} \quad (29)$$

gdje je novi geometrijski faktor  $C$  dan izrazom:

where the new geometric factor  $C$  is given by the following expression:

$$C = \sum_{m=0}^{M-1} \ln \prod_{i=0}^1 \frac{\Delta \cdot m + (-1)^i l + \sqrt{(\Delta \cdot m + (-1)^i l)^2 + 2^i a^2}}{\Delta \cdot m - (-1)^i l + \sqrt{(\Delta \cdot m - (-1)^i l)^2 + 2^i a^2}} \quad (30)$$

Sada je moguće korištenjem izraza (22), (24) i (29) odrediti prividni specifični električni otpor dvoslojnog tla u slučaju kada je uvažena duljina strujnih i naponskih mjernih elektroda:

Using Expressions (22), (24) and (29), it is now possible to determine the apparent resistivity of two-layer soil when the lengths of the current and voltage measurement electrodes are taken into account:

$$\rho(a) = \rho_g \left( 1 + C^{-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \beta^n \sum_{i=0}^1 \ln \prod_{j=0}^1 \frac{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^j + (-1)^i l) + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^j + (-1)^i l)^2 + 2^i a^2}}{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^j - (-1)^i l) + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^j - (-1)^i l)^2 + 2^i a^2}} \right) \quad (31)$$

gdje je koeficijent odslikavanja  $\beta$  dan izrazom:

where the imaging coefficient  $\beta$  is given by the following expression:

---

$$\beta = \frac{\rho_d - \rho_g}{\rho_d + \rho_g} \quad (32)$$

---

Dobiveni izraz je **najtočniji izraz** kojim se određuje prividni specifični otpor tla mjeren Wennerovim spojem. Vrijedi kako za male razlike između elektroda  $a < l$ , tako i obrnuto  $l > a$ , odnosno, vrijedi za sve razmake mjernih elektroda, jer je uvažen utjecaj stvarne geometrije strujnih elektroda za određivanje napona  $U_{BC}$ . Zbog svoje točnosti dobiveni izraz će se smatrati referentnim izrazom, uz pomoć kojeg će se provjeravati točnost izraza za prividni specifični otpor tla prema IEEE normi. **Jedina pretpostavka, a time i ograničenje pri korištenju dobivenog izraza je da mjerne elektrode ne prodiru u donji sloj tla.**

The expression obtained is the **most precise expression** with which apparent soil resistivity is determined when measured by the Wenner method. It applies for small differences between electrodes  $a < l$ , as well as the reverse  $l > a$ , i.e. it is valid for all spacing between measurement electrodes, because the influence of the actual geometry of the current electrodes for determining voltage  $U_{BC}$  is taken into account. Due to the precision of the expression obtained, it will be considered as a reference expression, according to which the precision of the expression for apparent soil resistivity according to the IEEE standard will be checked. **The only assumption, and thereby limitation, in using the obtained expression is that the measurement electrodes do not penetrate into the lower soil layer.**

Međunarodnom normom IEEE Std. 81-1983 [1], prividni otpor tla određuje se izrazom:

With the international IEEE Std. 81-1983 [1], apparent soil resistivity is determined with the following expression:

---

$$\rho(a) = \rho_s \left[ 1 + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2nh}{a}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{4 + \left(\frac{2nh}{a}\right)^2}} \right) \right] \quad (33)$$

---

koji je izveden pod pretpostavkom da se štapne elektrode mogu zamijeniti s kuglastim. Izraz (33) ima upitnu točnost za male razmake između elektroda, tj. kada je  $a < l$ . O tome kolika će pogreška tada nastupiti bit će jasno iz numeričkih primjera.

that is derived under the assumption that rod electrodes can be replaced with spherical electrodes. Expression (33) has doubtful precision for small spaces between electrodes, i.e. when  $a < l$ . The extent of the error occurring then will be clear from numerical examples.

## 5 NUMERIČKI PRIMJERI

Korištenjem izraza (31) za prividni specifični električni otpor dvoslojnog tla moguće je na numeričkom primjeru lako utvrditi granice valjanosti i pogrešku koja nastaje korištenjem pojednostavljenog izraza prema međunarodnoj normi (33) [1] za različite slučajeve koji mogu nastupiti u praksi.

Kao što je to i uobičajeno granice valjanosti nekog izraza i/ili modela umjesto matematičkog dokaza najlakše je utvrditi uspoređujući dobivene rezultate s točnim modelom. Neka kao primjer posluži slučaj kada je tlo dvoslojno, debljina gornjeg sloja iznosi 1 m, 2 m i 5 m, njegov specifični električni otpor  $200 \Omega\text{m}$  ( $\rho_g = 200 \Omega\text{m}$ ). Donji sloj tla neka ima specifični električni otpor  $100 \Omega\text{m}$  ( $\rho_d = 100 \Omega\text{m}$ ), te se proteže u beskonačnost. Neka su sve četiri elektrode mjernog spoja (sonde) jednake kao i njihov ukopani dio. Duljina ukopanog dijela mjernih elektroda iznosi 0,4 m ( $l = d = 0,4 \text{ m}$ ).

Za očekivati je da će najveća pogreška pri određivanju specifičnog električnog otpora tla teorijskim modelom koji nadomješta štapne elektrode s kuglastim nastupiti pri malim razmacima između strujnih elektroda, tj. kada je udaljenost  $a$  između susjednih elektroda mjerljiva s duljinom strujnih i/ili naponskih mjernih elektroda. Iz tog razloga analiza je ograničena na promatranje krivulje prividnog specifičnog električnog otpora za male razmake između susjednih elektroda koje iznosi proizvoljno 10 m. Promatra se slučaj kada je duljina cijelog ožičenja mjernog spoja 30 m (slika 1). Pogreška će ovisiti o nekoliko parametara: debljini gornjeg sloja tla, specifičnom električnom otporu gornjeg sloja tla, specifičnom električnom otporu donjeg sloja tla, duljini naponskih mjernih elektroda te duljini strujnih mjernih elektroda i naravno o udaljenosti između susjednih elektroda.

Slika 5 prikazuje krivulje prividnih specifičnih otpora tla u funkciji udaljenosti između susjednih elektroda. Krivulja prividnog specifičnog otpora tla dobivena prema izrazu (31) prikazana je crvenom bojom, a ona dobivena prema IEEE normi tj. prema izrazu (33) prikazana je plavom bojom. Specifični otpor gornjeg sloja tla iznosi  $\rho_g = 200 \Omega\text{m}$ , njegova debljina  $h = 1 \text{ m}$ , a specifični otpor donjeg sloja tla  $\rho_d = 100 \Omega\text{m}$ . Brojevi iteracija su  $M = 5$  i  $N = 20$ .

## 5 NUMERICAL EXAMPLES

By using Expression (31) for the apparent resistivity of two-layer soil, it is easily possible to determine the validity limits and error that occur on the numerical example when using the simplified expression according to the international standard (33) [1] for various instances that occur in practice.

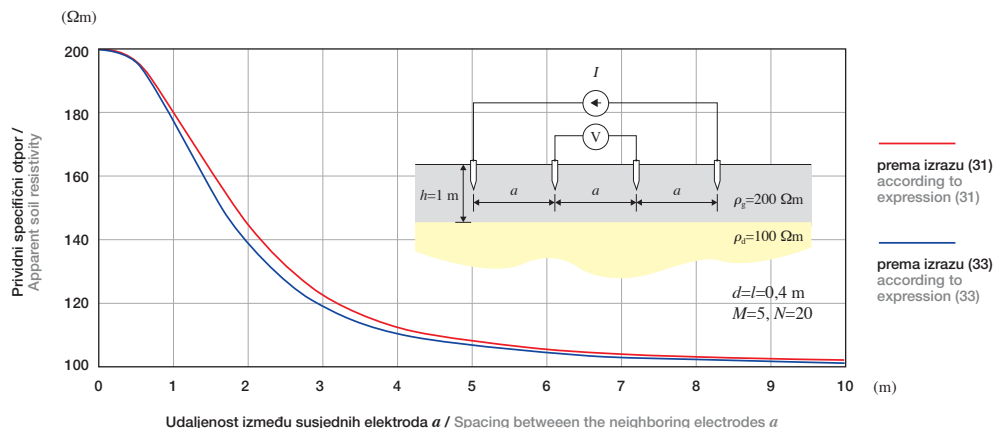
As is usually the case, the validity limits of an expression and/or model instead of a mathematical proof can most easily be determined by comparing the results obtained with a precise model. A case in which the soil is two-layer, the thickness of the soil is 1 m, 2 m and 5 m; and its resistivity is  $200 \Omega\text{m}$  ( $\rho_g = 200 \Omega\text{m}$ ) is used as an example. Let the lower soil layer have a resistivity of  $100 \Omega\text{m}$  ( $\rho_d = 100 \Omega\text{m}$ ) and extend to infinity. Let all four electrodes (probes) of the measurement circuit be equal, as well as their buried part. The length of the buried part of the measurement electrodes amounts to 0,4 m ( $l = d = 0,4 \text{ m}$ ).

It is to be expected that the greatest error in determining the soil resistivity with a theoretical model that replaces rod electrodes with spherical ones will occur when the spacing between the current electrodes is small, i.e. when distance  $a$  between neighboring electrodes is approximately the same length of the current and/or voltage measurement electrodes. For this reason, analysis is limited to studying the apparent resistivity curve for small spaces between neighboring electrodes that arbitrarily amount to 10 m. A case is studied when the length of the entire wiring of the measurement circuit is 30 m (Figure 1). The error will depend upon several parameters: the thickness of the upper soil layer, the resistivity of the upper soil layer, the resistivity of the lower soil layer, the length of the voltage measurement electrodes and the length of the current measurement electrodes and, naturally, the distance between neighboring electrodes.

Figure 5 presents apparent soil resistivity curves as functions of the distance between the neighboring electrodes. The apparent soil resistivity curve obtained according to Expression (31) is shown in red, and that obtained according to the IEEE standard, i.e. according to Expression (33), is shown in blue. The resistivity of the upper soil layer amounts to  $\rho_g = 200 \Omega\text{m}$ , its thickness is  $h = 1 \text{ m}$ , and the resistivity of the lower soil layer is  $\rho_d = 100 \Omega\text{m}$ . The number of iterations are  $M = 5$  and  $N = 20$ .

### Slika 5

Prividni specifični otpor tla prema izrazima (31) i (33)  
Figure 5  
Apparent soil resistivity according to expressions (31) and (33)

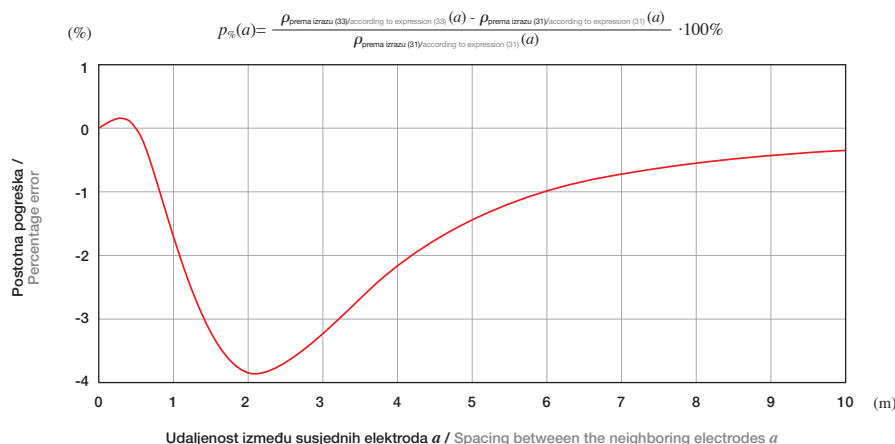


Na slici 6 prikazana je krivulja postotne pogreške u određivanju prividnog specifičnog otpora tla prema IEEE normi, tj. prema izrazu (33) u odnosu na izraz (31), u funkciji razmaka između susjednih elektroda za parametre tla prema slici 5.

In Figure 6, the percentage error curve is shown when apparent soil resistivity is determined according to the IEEE standard, i.e. according to Expression (33), in comparison to Expression (31), in the function of the distance between the neighboring electrodes for soil parameters according to Figure 5.

### Slika 6

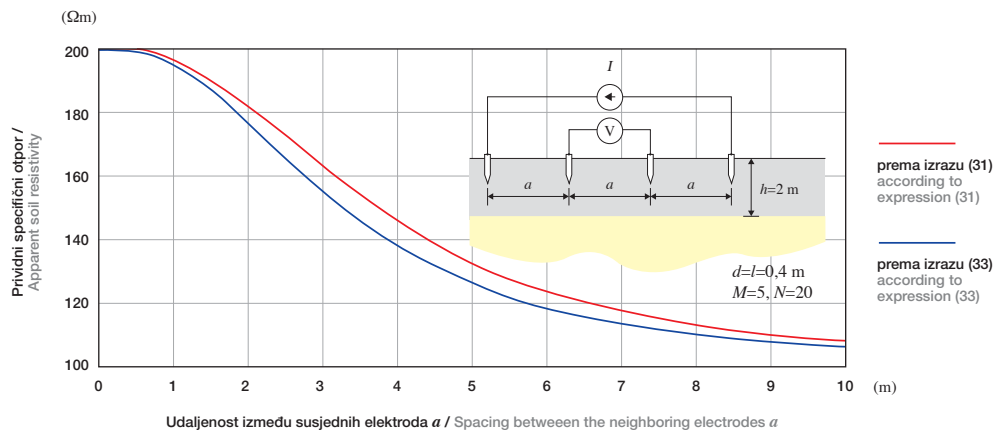
Postotna pogreška IEEE izraza u određivanju prividnog specifičnog otpora  
Figure 6  
Percentage error of the IEEE expression in determining apparent resistivity



Slika 7 prikazuje krivulje prividnih specifičnih otpora tla u funkciji udaljenosti između susjednih elektroda. Krivulja prividnog specifičnog otpora tla dobivena prema izrazu (31) prikazana je crvenom bojom, a ona dobivena prema IEEE normi, tj. prema izrazu (33) prikazana je plavom bojom. Specifični otpor gornjeg sloja tla iznosi  $\rho_g = 200 \Omega\text{m}$ , njegova debljina  $h = 2 \text{ m}$ , a specifični otpor donjeg sloja tla  $\rho_d = 100 \Omega\text{m}$ .

Figure 7 shows the apparent soil resistivity curves the functions of the distance between neighboring electrodes. The apparent soil resistivity curve obtained according to Expression (31) is shown in red and that obtained according to the IEEE standard, i.e. according to Expression (33), is shown in blue. The resistivity of the upper soil layer amounts to  $\rho_g = 200 \Omega\text{m}$ , its thickness is  $h = 2 \text{ m}$ , and the resistivity of the lower soil layer is  $\rho_d = 100 \Omega\text{m}$ .

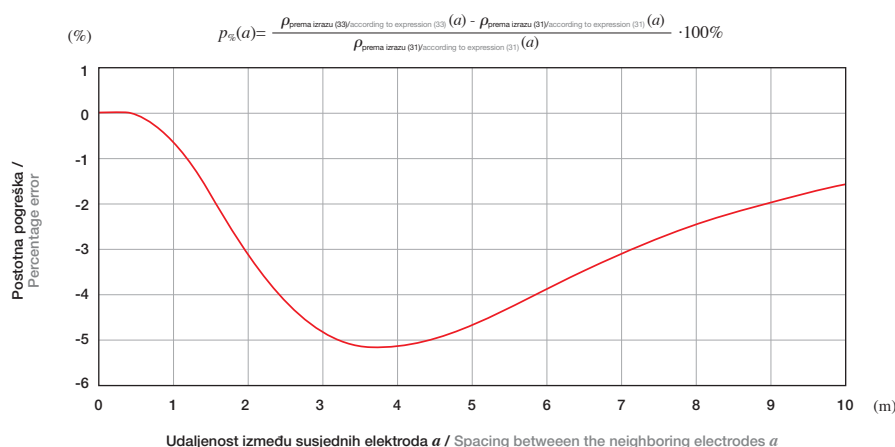




**Slika 7**  
Prividni specifični otpor tla prema izrazima (31) i (33)  
**Figure 7**  
Apparent soil resistivity according to Expressions (31) and (33)

Na slici 8 prikazana je krivulja postotne pogreške u određivanju prividnog specifičnog otpora tla prema IEEE normi, tj. prema izrazu (33) u odnosu na izraz (31), u funkciji razmaka između susjednih elektroda za parametre tla prema slici 7.

In Figure 8, the percentage error curve is shown in the determination of apparent soil resistivity according to the IEEE standard, i.e. according to Expression (33) in relation to Expression (31), as the function of the distance between the neighboring electrodes for the soil parameters according to Figure 7.



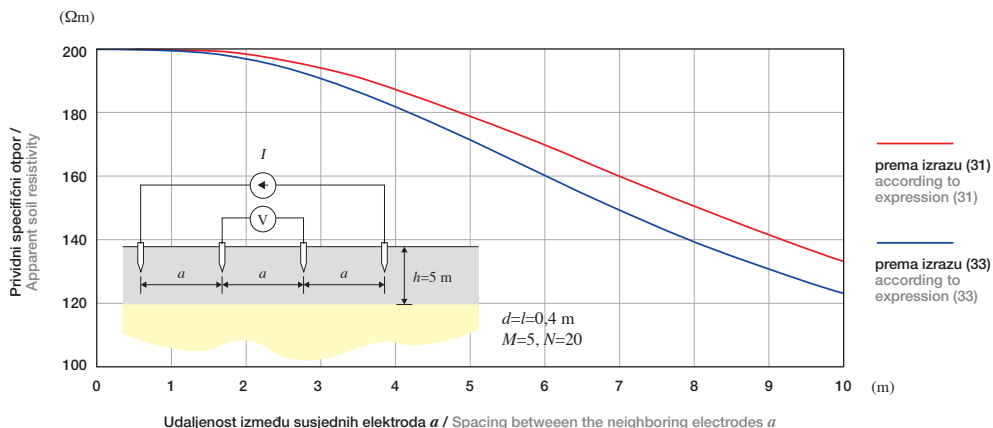
**Slika 8**  
Postotna pogreška IEEE izraza u određivanju prividnog specifičnog otpora  
**Figure 8**  
Percentage error of the IEEE expression in comparison to apparent resistivity

Slika 9 prikazuje krivulje prividnih specifičnih otpora tla u funkciji udaljenosti između susjednih elektroda. Krivulja prividnog specifičnog otpora tla dobivena prema izrazu (31) prikazana je crvenom bojom, a ona dobivena prema IEEE normi, tj. prema izrazu (33) prikazana je plavom bojom. Specifični otpor gornjeg sloja tla iznosi  $\rho_g = 200 \Omega\text{m}$ , njegova debljina  $h = 5 \text{ m}$ , a specifični otpor donjeg sloja tla  $\rho_d = 100 \Omega\text{m}$ .

Figure 9 presents apparent soil resistivity curves as functions of the distance between neighboring electrodes. The apparent soil resistivity curve obtained according to Expression (31) is shown in red, and the one obtained according to IEEE standard, i.e. according to Expression (33), is shown in blue. The resistivity of the upper soil layer amounts to  $\rho_g = 200 \Omega\text{m}$ , its thickness is  $h = 5 \text{ m}$ , and the resistivity of the lower soil layer is  $\rho_d = 100 \Omega\text{m}$ .

**Slika 9**

Prividni specifični otpor tla prema izrazima (31) i (33)  
**Figure 9**  
 Apparent soil resistivity according to Expressions (31) and (33)

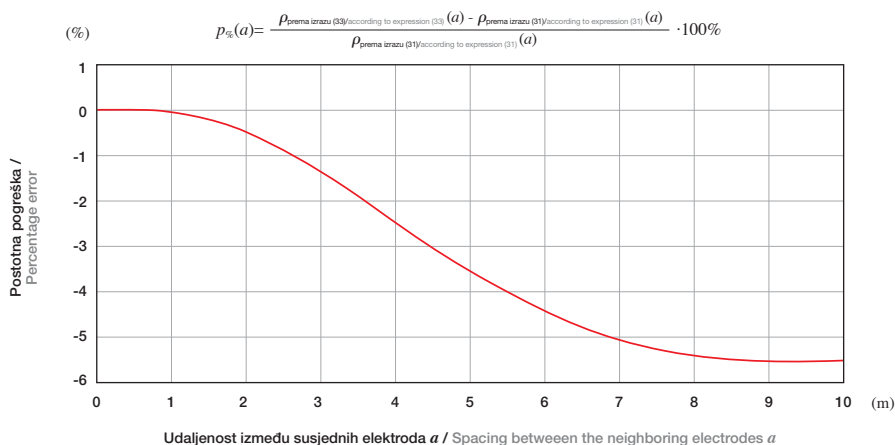


Na slici 10 prikazana je krivulja postotne pogreške u određivanju prividnog specifičnog otpora tla prema IEEE normi, tj. prema izrazu (33) u odnosu na izraz (31), u funkciji razmaka između susjednih elektroda za parametre tla prema slici 9.

In Figure 10, the percentage error curve in the determination of apparent soil resistivity according to the IEEE standard, i.e. according to Expression (33), is shown in comparison to Expression (31), as the function of the distance between the neighboring electrodes for the soil parameters according to Figure 9.

**Slika 10**

Postotna pogreška IEEE izraza u određivanju prividnog specifičnog otpora  
**Figure 10**  
 Percentage error of the IEEE expression in the determination of apparent resistivity



## 6 ANALIZA REZULTATA

Slike 6, 8 i 10 ukazuju da pogreška u određivanju prividnog specifičnog otpora tla prema izrazu (33) u odnosu na izraz (31) može biti pozitivna, ili negativna, ovisno od slučaja do slučaja.

Na slici 6 navedena pogreška pri vrlo malim razmacima između dvije susjedne elektrode je pozitivna, zatim naglo postaje negativna te maksimum pogreške nastupa kada je razmak između susjednih elektroda približno 2 m. Daljnjim povećanjem razmaka između susjednih elektroda pogreška se smanjuje te teži ka nuli. Ovako vladanje pogreške u određivanju prividnog specifičnog otpora tla prema izrazu (33) u odnosu na izraz (31) tipično je i za ostale analizirane slučajeve.

Kada su mjerne elektrode jako blizu ( $a \ll l$ ) jedna drugoj, tada na potencijal naponskih mjernih elektroda izraziti utjecaj imaju originalne strujne elektrode A i D, a njihove slike tek neznatan utjecaj. S obzirom da ekvipotencijalne krivulje u blizini strujnih elektroda imaju oblik elipse s jako izraženim ekscentritetom, jedna takva ekvipotencijalna krivulja prelazi preko uzdužne osi naponskih mjernih elektroda, te se s vrlo dobrom točnošću može uzeti da potencijal naponske mjerne elektrode odgovara tom potencijalu.

Daljnjim povećanjem udaljenosti između mjernih elektroda na iznos potencijala naponskih mjernih elektroda raste utjecaj zamišljenih odslikanih strujnih elektroda. Njihove ekvipotencijalne krivulje, koje su također oblika elipsi presijecaju uzdužnu os naponske mjerne elektrode u više točaka, što uzrokuje i pojavu maksimuma pogreške pri određivanju prividnog specifičnog otpora tla prema izrazu (33) u odnosu na izraz (31). Naime, prema izrazu (33) potencijal je određen samo u jednoj točki, a koja se nalazi na granici tlo-zrak, dok je prema izrazu (31) ona određena u više točaka metodom srednjeg potencijala.

Daljnje povećavanje udaljenosti između mjernih elektroda uzrokovat će smanjenje pogreške u određivanju prividnog specifičnog otpora tla prema izrazu (33) u odnosu na izraz (31). Naime, iako ekvipotencijalne krivulje oko štapnih elektroda imaju oblik elipse, kada su točke promatranja daleko od njih, ekvipotencijalne krivulje poprimaju oblik kružnice. Iz tog razloga kada je velik razmak između strujnih i naponskih elektroda potencijal se može s dobrom točnošću određivati izrazima za točkaste izvore polja, kod kojih su ekvipotencijalne krivulje oblika kružnice.

## 6 ANALYSIS OF THE RESULTS

Figures 6, 8 and 10 show that the error in the determination of apparent soil resistivity according to Expression (33) in comparison to Expression (31) can be positive or negative, depending on the particular case.

In Figure 6, the stated error when there are very small distances between two neighboring electrodes is positive, then suddenly becomes negative and the maximum error occurs when the distance between neighboring electrodes is approximately 2 m. With further increases in the distance between neighboring electrodes, the error decreases and tends toward zero. Such behavior of the error in the determination of apparent soil resistivity according to Expression (33) in comparison to Expression (31) is also typical for other cases analyzed.

When measurement electrodes are very close ( $a \ll l$ ) to each other, the original current electrodes A and D have a marked influence on the potential of the voltage measurement electrodes and their images have only an insignificant influence. Since the equipotential curves in the vicinity of the current electrodes have the form of an ellipse with marked eccentricity, one such equipotential curve crosses the longitudinal axis of the voltage measurement electrodes, and it can be said with very good precision that the potential of the voltage measurement electrode corresponds to this potential.

With further increases in the distance between the measurement electrodes, the influence of the imaginary images of the current electrodes upon the potential of the voltage measurement electrodes increases. Their equipotential curves, which are also in the form of an ellipse, cross the longitudinal axis of the voltage measurement electrode at several points, which also causes maximum error in the determination of apparent soil resistivity according to Expression (33) in comparison to Expression (31). According to Expression (33), the potential is determined at only one point, which is located at the soil-air boundary, while according to Expression (31) it is determined at several points using the mean potential method.

Further increases in the distance between the measurement electrodes will result in a reduction in error in the determination of soil resistivity according to Expression (33) in comparison to Expression (31). Although the equipotential curves in the vicinity of the rod electrodes have the form of an ellipse, when the observation points are distant from them, the equipotential curves acquire the form of a circle. For this reason, when there is a large distance between the current and voltage electrodes, the potential can be determined with good precision with the expressions for the point sources, where equipotential curves are of circular form.

Osim toga, zbog velike geometrijske udaljenosti odslikanih zamišljenih slika strujnih elektroda od naponskih elektroda, neznatna je promjena potencijala duž uzdužnih osi naponskih elektroda. Iz tog razloga nije velika razlika između potencijala određenog u jednoj točki na granici tlo-zrak, ili metodom srednjeg potencijala kada je velik razmak između mjernih elektroda. Zanimljivo je za primijetiti da maksimum pogreške nastupa kada je razmak između susjednih elektroda približno jednak dvostrukoj debljini gornjeg sloja tla.

Prve slike izvora polja elektroda A i D u područjima a i c imaju najveći doprinos korekciji potencijala, u prvom redu zbog njihove relativne blizine spram naponskih mjernih elektroda u odnosu na ostale slike, te neznatno oslabljene struje  $\beta I$ , koja se uvažava u računu. Ekvipotencijalne krivulje prvih slika elektroda A i D u područjima a i c na mjestu naponskih elektroda presijecaju uzdužnu os naponskih mjernih elektroda u više točaka (slika 2b). Navedeni utjecaj uvažen je korištenjem metode srednjeg potencijala. Kako su prve slike strujnih elektroda A i D udaljene od granice tlo-zrak upravo za dvostruku debljinu gornjeg sloja tla razumljiva je pojava maksimuma pogreške kada je razmak između susjednih elektroda jednak dvostrukoj debljini gornjeg sloja tla. Upravo pri tom razmaku najizraženiji je utjecaj prvih slika strujnih elektroda.

Zanimljivo je za primijetiti da je pogreška IEEE izraza prevladavajuće negativna. Razlog tome je što potencijal određen izrazom za štap logaritamski opada pri povećanju udaljenosti točaka promatranja od njegove uzdužne osi, a za kuglu, tj. točkaste izvore s kvadratom udaljenosti, odnosno pri malim udaljenostima, opada brže nego li za štap. Na taj način je potencijal izračunat izrazima za točkaste izvore polja pri istoj struji manji, te je iz tog razloga i specifični električni otpor niži.

## 7 ZAKLJUČAK

Iznenadujuće je da pogreška koja se dobiva korištenjem izraza iz IEEE norme nije prelazila 10 %, za brojne analizirane slučajeve, odnosno 6 % u prikazanim primjerima. **Na temelju ovog članka i njegovih rezultata neosporna i razvidna je svrhovitost uporabe IEEE izraza.** Autori su dali svoj doprinos u odgonetanju desetljećima stare zagonetke o točnosti IEEE izraza za prividni specifični električni otpor dvoslojnog tla. Ujedno, dan je alternativni izraz za određivanje prividnog specifičnog otpora dvoslojnog tla mjeren Wennerovim spojem, koji je prema trenutnim spoznajama autor jedinstven.

Moreover, due to the great geometric distance of the imaginary images of the current electrodes from the voltage electrodes, the change in potential is insignificant along the longitudinal axis of the voltage electrodes. For this reason, there is not a large difference between the potential determined at one point on the soil-air boundary or by the mean potential method when there is a great distance between the measurement electrodes. It is interesting that the maximum error occurs when the distance between neighboring electrodes is approximately twice the thickness of the upper soil layer.

The first images of the field sources of electrodes A and D in Areas a and c make the greatest contribution to the correction of the potential, in the first place due to their relative vicinity to the voltage measurement electrodes in comparison to the other images, and the insignificant reduction in current  $\beta I$ , which is taken into account in the calculation. The equipotential curves of the first images of electrodes A and D in Areas a and c at the site of the voltage electrodes cross the longitudinal axis of the voltage measurement electrodes at several points (Figure 2b). This influence is taken into account by using the mean potential method. Since the first images of current electrodes A and D are at a distance from the soil-air boundary of twice the thickness of the upper soil layer, the occurrence of the maximum error is understandable when the distance between the neighboring electrodes is equal to twice the thickness of the upper soil layer. It is precisely at this distance that the influence of the first images of the current electrodes is the most marked.

Interestingly, the error of the IEEE expression is predominantly negative. The reason for this is that the potential determined by the expression for the rod is logarithmically decreased with an increase in the distance of the observation point from its longitudinal axis, and for a sphere, i.e. point sources with the square of the distance or at small distances decreases more rapidly than for a rod. In this manner, the potential calculated with the expressions for point sources at the same current is lower, and for this reason the resistivity is lower.

## 7 CONCLUSION

It is surprising that the error obtained by using the expression from the IEEE standard did not exceed 10% in numerous cases analyzed, i.e. 6% in the examples presented. **Based upon this article and their results, the purpose of using the IEEE expression is indisputable and clear.** The authors have contributed to deciphering the decades-old enigma regarding the precision of the IEEE expression for the apparent resistivity of two-layer soil. An alternative expression

Iako je ovim člankom potvrđena primjenjivost IEEE izraza, to ne znači da svaki izraz predložen normom treba prihvatiti bez kritičkog osvrta. Naime, pri izdavanju normi i preporučenih izraza za uporabu treba imati na umu fizikalne pretpostavke pod kojim one vrijede, te ponekad i ograničenja matematičkog instrumentarija koji su uključeni u njihovu uporabu.

Iako se dobiveni izraz (31) za prividni specifični električni otpor, može činiti znatno složenijim od izraza (33) prema IEEE normi, treba imati na umu da se danas proračuni ove vrste odvijaju isključivo na osobnom računaru (PC). Iz tog razloga nešto složeniji izraz nije zapreka njegovoj uporabi, pogotovo ukoliko se ima na umu da je on svojom formom prilagođen pisanju programskih petlji, te je time programiranje elegantno.

Autori ovog članka se nadaju da će dobiveni alternativni izraz kao i prikazana metodologija uvažavanja stvarne geometrije elektroda i pri nekim drugim mjernim postupcima omogućiti zainteresiranim čitateljima da na beskompromisan način pristupaju svojim zadaćama.

has also been provided for the determination of the apparent resistivity of two-layer soil measured by the Wenner method, which is unique to the best knowledge of the authors.

Although this article affirms the applicability of the IEEE expression, this does not mean that every expression proposed by a standard should be accepted without critical examination. When assessing standards and recommended expressions for use, it is necessary to bear in mind the physical assumptions according to which they are valid, and sometimes the limitations of the mathematical instrumentation they use.

Although the obtained Expression (31) for apparent resistivity may seem significantly more complex than Expression (33) according to the IEEE standard, it should be remembered that calculations of this type are performed today exclusively on personal computers. For this reason, the somewhat greater complexity of the expression should not be an obstacle to its use, especially because its form has been adapted to writing program loops and elegant programming.

The authors of this article hope that the alternative expression and methodology presented, which take the actual geometry of electrodes and other measurement procedures into account, will help interested readers approach their tasks in an uncompromising manner.

---

## LITERATURA / REFERENCES

- [1] IEEE Std 81-1983, IEEE Guide for Measuring Earth Resistivity, Ground Impedance and Earth Surface Potentials of a Ground System, (Revision of IEEE Std. 81 -1962), The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., New York, 1983
- [2] WENNER, F., A Method for Measuring Earth Resistivity, Bureau of Standards scientific paper, 1915, No. 258, Washington, D.C., 1915
- [3] LAGACÉ, P. J., FORTIN, J., CRAINIC, E. D., Interpretation of Resistivity Sounding Measurements in N-Layer Soil using Electrostatic Images, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol.11, No. 3, July 1996
- [4] VAN NOSTRAND, R. G., COOK, K. L., Interpretation of Resistivity Data, Geological Survey professional paper 499, US Department of the Interior, Washington, D.C., 1966
- [5] HAZNADAR, Z., ŠTIH, Ž., Elektromagnetizam 1, Školska knjiga, Zagreb, 1997.
- [6] SENIOR, T. B. A., VOLAKIS, J. L., Approximate boundary conditions in electromagnetics, The Institution of electrical Engineers, London, 1995
- [7] BARIĆ, T., JOZSA, L., GLAVAŠ, H., Kapacitivni utjecaj visokonaponskih nadzemnih vodova na mjerenje specifičnog otpora tla, Energija, god. 56(2007), broj 2, Zagreb, 2007.
- [8] BARIĆ, T., BORAS, V., GALIĆ, R., Nadomjesni model tla zasnovan na umjetnim neuronskim mrežama, Energija, god. 56(2007), broj 1, Zagreb, 2007.
- [9] HARRIS, J. W., STOCKER, H., Handbook of Mathematics and Computational Science, 1998 Springer – Verlag, New York, Inc.

---

Uredništvo primilo rukopis:  
2007-10-09

Manuscript received on:  
2007-10-09

Prihvaćeno:  
2007-11-28

Accepted on:  
2007-11-28

# UPUTE AUTORIMA

## UPUTSTVO ZA RUKOPIS

1. Časopis Energija objavljuje članke koji do sada nisu objavljeni u nekom drugom časopisu.
2. Radovi se pišu na hrvatskom ili engleskom jeziku, u trećem licu, na jednoj stranici papira, počinju s uvodom i završavaju sa zaključkom, u dvostrukom proredu i s dostatnim marginama. Stranice se označavaju uzastopnim brojevima.
3. Radovi u pravilu ne mogu biti dulji od 14 stranica časopisa Energija (oko 9000 riječi).
4. Ime i prezime autora, znanstvena ili stručna titula, naziv i adresa tvrtke u kojoj autor radi i e-mail adresa navode se odvojeno.
5. Iznad teksta samoga rada treba biti sažetak od najviše 250 riječi. Sažetak treba biti zaokružena cjelina razumljiva prosječnom čitatelju izvan konteksta samoga rada. Nakon sažetka navode se ključne riječi.
6. Članci se pišu u Word-u sa slikama u tekstu ili u posebnim file-ovima u tiff formatu, 1:1, rezolucije namanje 300 dpi.
7. Članci se pišu bez bilješki na dnu stranice.
8. Matematički izrazi, grčka slova i drugi znakovi trebaju biti jasno napisani s dostatnim razmacima.
9. Literatura koja se koristi u tekstu navodi se u uglatoj zagradi pod brojem pod kojim je navedena na kraju članka. Korištena literatura navodi se na kraju članka redom kojim je spomenuta u članku. Ako rad na koji se upućuje ima tri ili više autora, navodi se prvi autor i potom et al. Nazivi časopisa se navode u neskrćenom obliku.

### Časopis

[1] FRAZIER, L., FODOR, J. D., *The sausage machine: A new two-stage parsing model. Cognition*, 6 (1978), 291– 325

### Knjiga

[5] NAGAO, M., *Knowledge and Inference. Academic Press, Boston, 1988*

### Referat

[7] WATROUS, R. L., SHASTRI, L., *Learning phonetic features using connectionist networks: An experiment in speech recognition. Presented at the Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks, (1987) San Diego, CA*

### Neobjavljeno izvješće/teze

[10] ROZENBLIT, J. W., *A conceptual basis for model-based system design. PhD Thesis, Wayne State University, Detroit, Michigan, 1985*

10. Članak je prihvaćen za objavljivanje ako ga pozitivno ocijene dva stručna recenzenta. U postupku recenzije članci se kategoriziraju na sljedeći način:
  - izvorni znanstveni članci – radovi koji sadrže do sada još neobjavljene rezultate izvornih istraživanja u potpunom obliku,
  - prethodna priopćenja – radovi koji sadrže do sada još neobjavljene rezultate izvornih istraživanja u preliminarnom obliku,
  - pregledni članci – radovi koji sadrže izvoran, sažet i kritički prikaz jednog područja ili njegova dijela u kojem autor i sam aktivno sudjeluje – mora biti naglašena uloga autorovog izvornog doprinosa u tom području u odnosu na već objavljene radove, kao i pregled tih radova,
  - stručni članci – radovi koji sadrže korisne priloge iz struke i za struku, a ne moraju predstavljati izvorna istraživanja.
11. Članci se lektoriraju i provodi se metrološka recenzija.
12. Članci se dostavljaju u elektroničkom obliku i 1 primjerak u tiskanom obliku na adresu:  
HEP d.d. - Energija  
N/r tajnika Uredivačkog odbora – mr. sc. Slavica Barta-Koštrun  
Ulica grada Vukovara 37, 10000 Zagreb, Hrvatska  
Tel.: +385 (1) 632 2641  
Faks: +385 (1) 617 0438  
e-mail: slavica.barta@hep.hr

## KOREKTURA I AUTORSKI PRIMJERC

1. Autori su dužni izvršiti korekturu svoga rada prije objavljivanja. Veće promjene teksta u toj fazi neće se prihvatiti.
2. Autori dobivaju besplatno 5 primjeraka časopisa u kojemu je objavljen njihov članak. Naknada za objavljeni članak obračunava se prema Odluci o visini autorskih honorara časopisa Energija.

## AUTORSKO PRAVO

1. Autorsko pravo na sve objavljene materijale ima časopis Energija.
2. Autori moraju telefaksom dostaviti popunjeni obrazac o autorskom pravu nakon prihvaćanja članka.
3. Autori koji žele koristiti materijale koji su prethodno objavljeni u časopisu Energija trebaju se obratiti izdavaču.

## MANUSCRIPTS

1. Energija journal publishes articles never before published in another periodical.
2. Articles are written in Croatian or English, in the third person, on one paper side, beginning with an introduction and ending with a conclusion, with double line spacing and adequate margins. Pages are numbered consecutively.
3. As a rule articles cannot exceed 14 pages of the Energija journal (about 9000 words).
4. The name of the author and his/her academic title, the name and address of the company of the author's employment, and e-mail address, are noted separately.
5. The text of the article is preceded by a summary of max. 250 words. The summary is a rounded off whole comprehensible to an average reader apart from the context of the article. The summary is followed by the listing of the key words.
6. Articles are written in MS Word with pictures embedded or as separate TIFF files, 1:1, min. 300 dpi.
7. Articles are written without bottom-of-page footnotes.
8. Mathematical expressions, Greek letters and other symbols must be clearly written with sufficient spacing.
9. The sources mentioned in the text of the article are only to be referenced by the number under which it is listed at the end of the article. References are listed at the end of the article in the order in which they are mentioned in the text of the article. If a work referenced has three or more authors, the first author is mentioned followed by the indication et al. Names of journals are given in full.

### *Journal*

[1] FRAZIER, L., FODOR, J. D., **The sausage machine: A new two-stage parsing model.** *Cognition*, 6 (1978), 291–325

### *Book*

[5] NAGAO, M., **Knowledge and Inference.** Academic Press, Boston, 1988

### *Conference paper*

[7] WATROUS, R. L., SHASTRI, L., **Learning phonetic features using connectionist networks: An experiment in speech recognition.** Presented at the Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks, (1987) San Diego, CA

### *Unpublished report/theses*

[10] ROZENBLIT, J. W., **A conceptual basis for model-based system design.** PhD Thesis, Wayne State University, Detroit, Michigan, 1985

10. An article will be accepted for publication if it is positively evaluated by two professional reviewers. In the review, articles are categorised as follows:
  - original scientific articles – works containing hitherto unpublished full results of original research,
  - preliminary information – works containing hitherto unpublished preliminary results of original research,
  - review articles – works containing the original, summarized and critical review from the field or from a part of the field in which the author of the article is himself/herself involved – the role of the author's original contribution to the field must be noted with regard to already published works, and an overview of such works provided,
  - professional articles – works containing useful contributions from the profession and for the profession, not necessarily derived from original research.
11. Articles will undergo language editing and metrological reviews.
12. Articles are to be submitted in a machine-readable form plus one printout to the following address:  
**HEP d.d. - Energija**  
**N/r tajnika Uređivačkog odbora – mr. sc. Slavica Barta-Koštrun**  
**Ulica grada Vukovara 37, 10000 Zagreb, Croatia**  
**Tel.: +385 (1) 632 2641**  
**Fax: +385 (1) 617 0438**  
**e-mail: slavica.barta@hep.hr**

## CORRECTIONS AND FREE COPIES FOR AUTHORS

1. Authors are required to make the corrections in their works prior to publication. Major alterations of the text at the stage of publication will not be accepted.
2. Authors will receive free of charge 5 copies of the Journal in which their respective articles appear. The fee for an article published will be calculated in accordance with the Decision on the Fees for the Authors of the Energija journal.

## COPYRIGHT

1. The copyright on all the materials published belongs to the Energija journal.
2. Authors must fax in a filled out copyright form when their articles have been accepted.
3. Authors wishing to use the materials published in the Energija journal need to contact the publisher.

# INSTRUCTIONS TO AUTHORS

## ENERGIJA 01

01-39

Štritof, I., Klečina, F.  
MODEL POTICAJNE REGULACIJE U PRIJENOSU ELEKTRIČNE  
ENERGIJE U REPUBLICI HRVATSKOJ  
(pregledni članak)

Štritof, I., Klečina, F.  
MODEL FOR INCENTIVE REGULATION IN THE TRANSMISSION OF  
ELECTRICAL ENERGY IN THE REPUBLIC OF CROATIA  
(review article)

40-63

Krajcar, S., Skok, M., Andročec, I., Blagajac, S., Solem, G.,  
Livik, K., Morland, B.  
TRENING CENTAR ZA TRGOVANJE ENERGIJOM  
(pregledni članak)

Krajcar, S., Skok, M., Andročec, I., Blagajac, S., Solem, G., Livik,  
K., Morland, B.  
TRAINING CENTRE FOR ENERGY TRADING  
(review article)

64-95

Mileusić, E.  
PRIJEDLOG UNAPREĐENJA PRAVILNIKA O ZAŠTITI OD  
ELEKTROMAGNETSKIH POLJA  
(pregledni članak)

Mileusić, E.  
PROPOSAL FOR REVISING THE CROATIAN REGULATIONS ON  
PROTECTION FROM ELECTROMAGNETIC FIELDS  
(review article)

96-113

Barić, T., Boras, V., Galić, R.  
NADOMJESNI MODEL TLA ZASNOVAN NA UMJETNIM  
NEURONSKIM MREŽAMA  
(prethodno priopćenje)

Barić, T., Boras, V., Galić, R.  
SUBSTITUTIONAL MODEL OF THE SOIL BASED ON ARTIFICIAL NEURAL  
NETWORKS  
(preliminary information)

114-133

Uran, V.  
PRINCIP IZVOĐENJA OPCIJA NA TRŽIŠTU ELEKTRIČNE  
ENERGIJE  
(pregledni članak)

Uran, V.  
THE PRINCIPLE OF EXERCISING OPTIONS ON THE ELECTRICITY  
MARKET  
(review article)

## ENERGIJA 02

144-181

Ilić, I., Maljković, Z., Gašparac, I., Pavlica, M., Ilić-Zubović,  
D., Jarić, V., Višković, A., Belobrajdić, R.  
METODOLOGIJA ODREĐIVANJA KORISNIČKE POGONSKE KARTE  
HIDROAGREGATA  
(pregledni članak)

Ilić, I., Maljković, Z., Gašparac, I., Pavlica, M., Ilić-Zubović, D.,  
Jarić, V., Višković, A., Belobrajdić, R.  
METHODOLOGY FOR DETERMINING THE ACTUAL PQ DIAGRAM OF A  
HYDROGENERATOR  
(review article)

182-215

Pavić, A., Trupinić, K.  
GUBICI ELEKTRIČNE ENERGIJE U DISTRIBUCIJSKOJ MREŽI  
(pregledni članak)

Pavić, A., Trupinić, K.  
ELECTRICAL ENERGY LOSSES IN THE DISTRIBUTION NETWORK  
(review article)

216-231

Jerbić, G.  
PRIMJENA TRANSFORMATORA S POPREČNOM REGULACIJOM U  
HRVATSKOM ELEKTROENERGETSKOM SUSTAVU  
(pregledni članak)

Jerbić, G.  
APPLICATION OF PHASE SHIFTING TRANSFORMERS IN THE  
CROATIAN POWER SUPPLY SYSTEMS  
(review article)

232-249

Barić, T., Glavaš, H., Jozsa, L.  
KAPACITIVNI UTJECAJ VISOKONAPONSKIH NADZEMNIH  
VODOVA NA MJERENJE SPECIFIČNOG OTPORA TLA  
(izvorni znanstveni članak)

Barić, T., Glavaš, H., Jozsa, L.  
CAPACITIVE INFLUENCE OF HIGH VOLTAGE OVERHEAD  
TRANSMISSION LINES ON THE MEASUREMENT OF SOIL RESISTIVITY  
(original scientific article)

250-259

Kuzmanović, B., Ferković, L., Baus, Z.  
DEFINICIJA AMPERA JE ZBUNJUJUĆA  
(izvorni znanstveni članak)

Kuzmanović, B., Ferković, L., Baus, Z.  
THE DEFINITION OF AMPER IS CONFUSING  
(original scientific article)



## ENERGIJA 03

268-291

*Kennedy M. W., Stanić, Z.*  
ENERGETSKA POLITIKA U EUROPI I NJEN UTJECAJ NA OPSKRBU  
ELEKTRIČNOM ENERGIJOM  
(pregledni članak)

*Kennedy M. W., Stanić, Z.*  
ENERGY POLICY IN EUROPE AND ITS IMPACT ON ELECTRICITY  
SUPPLY  
(review article)

292-327

*Zeljko, M., Čanović, M.*  
ENERGETSKI SEKTOR CRNE GORE – STANJE I PERSPEKTIVE  
(pregledni članak)

*Zeljko, M., Čanović, M.*  
THE CURRENT SITUATION AND FUTURE POTENTIAL OF THE  
MONTENEGRIN ENERGY SECTOR  
(review article)

328-345

*De Paoli, L., Višković A.*  
JAVNA POTPORA RAZVITKU OBNOVLJIVIH IZVORA ENERGIJE  
(pregledni članak)

*De Paoli, L., Višković A.*  
PUBLIC SUPPORT FOR THE DEVELOPMENT OF RENEWABLE ENERGY  
SOURCES  
(review article)

346-373

*Lugarić, L., Krajcar, S., Ćurković, A.*  
ANALIZA FINANCIJSKOG RIZIKA U VREDNOVANJU PROJEKATA  
IZGARDNJE VJETROELEKTRANA  
(izvorni znanstveni članak)

*Lugarić, L., Krajcar, S., Ćurković, A.*  
RISK ANALYSIS METHODOLOGIES FOR THE FINANCIAL EVALUATION  
OF WIND ENERGY POWER GENERATION PROJECTS  
(original scientific article)

374-387

*Kuzmanović, B., Baus, Z., Ferković, L.*  
RAČUNANJE SREDNJE I EFEKTIVNE VRIJEDNOSTI STRUJE  
(NAPONA) SLOŽENIH VALNIH OBLIKA  
(stručni članak)

*Kuzmanović, B., Baus, Z., Ferković, L.*  
CALCULATION OF THE MEAN AND EFFECTIVE CURRENT  
(VOLTAGE) VALUES OF COMPLEX WAVEFORMS  
(professional article)

## ENERGIJA 04

398-431

*Bogdan, Ž., Živković, S. A., Dokmanović, V., Merić, J.*  
TEHNOLOGIJE ČISTOG UGLJENA U STRATEGIJI RAZVOJA  
ELEKTROENERGETSKOG SUSTAVA  
(pregledni članak)

*Bogdan, Ž., Živković, S. A., Dokmanović, V., Merić, J.*  
CLEAN COAL TECHNOLOGIES IN THE STRATEGIC DEVELOPMENT OF  
THE ELECTRICAL ENERGY SYSTEM  
(review article)

432-455

*Sprčić, P., Krajcar, S.*  
PRIMJENA IZVEDENICA U UPRAVLJANJU CJENOVNIM RIZIKOM U  
ENERGETSKIM KOMPANIJAMA  
(pregledni članak)

*Sprčić, P., Krajcar, S.*  
THE APPLICATION OF DERIVATIVES BY ENERGY COMPANIES IN  
PRICE RISK MANAGEMENT  
(review article)

456-489

*Ilić, I., Maljković, Z., Gašparac, I., Pavlica, M., Ilić-Zubović, D.,  
Jarić, V., Višković, A., Belobrajčić, R.*  
PRIMJER PROVEDBE ALGORITMA IZRADA KORISNIČKE  
POGONSKE KARTE HIDROAGREGATA  
(izvorni znanstveni članak)

*Ilić, I., Maljković, Z., Gašparac, I., Pavlica, M., Ilić-Zubović, D.,  
Jarić, V., Višković, A., Belobrajčić, R.*  
AN EXAMPLE OF APPLYING ALGORITHM TO CREATE THE ACTUAL PQ  
DIAGRAM OF A HYDRO-GENERATOR  
(original scientific article)

490-517

*Mužinić, F., Škrlec, D.*  
MODELIRANJE PROJEKTNIH RIZIKA U RAZVOJU PROJEKTA  
VJETROELEKTRANE  
(izvorni znanstveni članak)

*Mužinić, F., Škrlec, D.*  
MODELING PROJECT RISKS IN THE DEVELOPMENT OF A WIND  
POWER PLANT PROJECT  
(original scientific article)

## ENERGIJA 05

526-553

*Klepo, M.*  
ULOGA REGULATORNOG TIJELA U DONOŠENJU TARIFNIH  
STAVOVA: OKRUGLI STOL – PRIKAZ I ZAKLJUČCI  
(pregledni članak)

*Klepo, M.*  
THE ROLE OF THE REGULATORY AGENCY IN THE ADOPTION OF TARIFF  
SYSTEMS: ROUND TABLE DISCUSSION – REPORT AND CONCLUSION  
(review article)

554-583

*Štritof, I., Klečina, F.*  
REGULATORNA POLITIKA I NJEN UTJECAJ NA PLANOVE  
RAZVOJA I IZGRADNJE REGULATORNIH ENERGETSKIH  
SUBJEKATA  
(pregledni članak)

*Štritof, I., Klečina, F.*  
REGULATORY POLICY AND ITS IMPACT ON THE DEVELOPMENT AND  
CONSTRUCTION PLANS OF REGULATED ENERGY ENTITIES  
(original scientific article)

584-607

*Tokić, A., Uglešić, I.*  
NUMERIČKI PRORAČUN NISKO FREKVENTNIH  
ELEKTROMAGNETSKIH PRIJELAZNIH POJAVA U ENERGETSKIM  
TRANSFORMATORIMA  
(izvorni znanstveni članak)

*Tokić, A., Uglešić, I.*  
THE NUMERICAL CALCULATION OF LOW FREQUENCY  
ELECTROMAGNETIC TRANSIENT PHENOMENA IN POWER  
TRANSFORMERS  
(original scientific article)

608-617

*Papazoglou, Th. M., Papazoglou, M. T., Thalassinakis, E. J.,  
Tsichlakis, Ch., Hatzigrygiou, N. D.*  
DIJAGNOSTIČKI PREGLED JEDNOG ISPADA  
ELEKTROENERGETSKOG SUSTAVA NA RODOSU  
(stručni članak)

*Papazoglou, Th. M., Papazoglou, M. T., Thalassinakis, E. J.,  
Tsichlakis, Ch., Hatzigrygiou, N. D.*  
DIAGNOSTIC REVIEW OF A BLACKOUT IN RHODES  
(professional article)

618-633

*Sutlović, E., Petric, K.*  
BAZA PODATAKA RELEJNE ZAŠTITE  
(stručni članak)

*Sutlović, E., Petric, K.*  
RELAY PROTECTION DATABASE  
(professional article)

## ENERGIJA 06

642-675

*Rajšl, I., Krajcar, S., Krpan, K.*  
PRIMJENA VIŠEAGENTSКИH SUSTAVA U SIMULATORIMA  
TRŽIŠTA ELEKTRIČNOM ENERGIJOM  
(pregledni članak)

*Rajšl, I., Krajcar, S., Krpan, K.*  
APPLICATION OF MULTI-AGENT SYSTEMS IN ELECTRICITY MARKET  
SIMULATORS  
(review article)

676-699

*Goić, R., Jakus, D., Mudnić, E.*  
PRORAČUN GODIŠNJIH GUBITAKA RADNE ENERGIJE  
U DISTRIBUCIJSKOJ MREŽI S PRIKLJUČENOM  
VJETROELEKTRANOM  
(izvorni znanstveni članak)

*Goić, R., Jakus, D., Mudnić, E.*  
CALCULATION OF ANNUAL ACTIVE ENERGY LOSSES IN A  
DISTRIBUTION NETWORK WITH A CONNECTED WIND POWER PLANT  
(original scientific article)

700-711

*Vujević, D.*  
PRIMJENA MÖBIUSOVE VRPCE U ELEKTROTEHNICI  
(prethodno priopćenje)

*Vujević, D.*  
APPLICATION OF THE MÖBIUS STRIP IN ELECTRICAL ENGINEERING  
(preliminary information)

712-729

*Čučić, B.*  
3D PRORAČUN KVAZISTATIČKOG MAGNETSKOG POLJA  
OKO VODIČA I FEROMAGNETSKE PLOČE INTEGRALNIM  
JEDNADŽBAMA  
(izvorni znanstveni članak)

*Čučić, B.*  
THE 3D CALCULATION OF THE QUASISTATIC MAGNETIC FIELD  
AROUND A CURRENT CARRYING CONDUCTOR AND FERROMAGNETIC  
PLATE BY MEANS OF INTEGRAL EQUATIONS  
(original scientific article)

730-753

*Barić, T., Šljivac, D., Stojkov, M.*  
GRANICE VALJANOSTI IZRAZA ZA MJERENJA SPECIFIČNOG  
OTPORA TLA WENNEROVOM METODOM PREMA IEEE NORMI  
Std. 81-1983  
(izvorni znanstveni članak)

*Barić, T., Šljivac, D., Stojkov, M.*  
VALIDITY LIMITS OF THE EXPRESSION FOR MEASURING SOIL  
RESISTIVITY BY THE WENNER METHOD ACCORDING TO IEEE  
STANDARD 81-1983  
(original scientific article)