PRORAČUN POKAZATELJA POUZDANOSTI TEHNIČKIH SUSTAVA UPOTREBOM MARKOVLJEVA PROCESA

Emil V i l e n i c a, Zagreb

UDK 621.31:519
STRUČNI ČLANAK

Uporaba metoda Markovljeva procesa koristi se za proračun pokazatelja pouzdanosti tehničkih sustava. Pokazatelji pouzdanosti tehničkih sustava su vjerojatnosti stanja u kojima se sustav može nalaziti, srednja vremena boravka sustava u tim stanjima i učestalost nastupanja tih stanja. U članku su objašnjene temeljne metode i postupci proračuna pokazatelja pouzdanosti tehničkih sustava uporabom Markovljeva procesa.

Ključne riječi: Markovljev proces, vjerojatnost stanja sustava, srednje vrijeme boravka u stanju sustava, učestalost nastupanja stanja sustava.

1. UVOD

Prilikom razmatranja tehničkih sustava često se javlja potreba za proračunom pokazatelja njihove pouzdanosti.

Iako ih postoji popriličan broj, jedna od učestalijih metoda koja se upotrebljava za proračun pokazatelja pouzdanosti je primjena Markovljeva procesa. Cilj ovoga članka je opisati Markovljev proces, te objasniti temeljne metode i postupke proračuna pokazatelja pouzdanosti tehničkih sustava njegovom uporabom. Članak se sastoji od tri poglavlja poredana tako da predstavljaju faze uporabe Markovljeva procesa, od uvodnih postavki do izračunavanja pokazatelja pouzdanosti.

2. DIJAGRAM PROSTORA STANJA SUSTAVA

Kvarovi u tehničkim sustavima su slučajni, odnosno stohastički događaji koji se mogu opisati Markovljevim procesima. Slikovni prikaz Markovljeva procesa, odnosno stohastičkih događaja koji se odvijaju u sustavu predstavljen je dijagramom prostora stanja sustava. Dijagram prostora stanja sustava sastoji se od stanja sustava i prijelaza među njima.

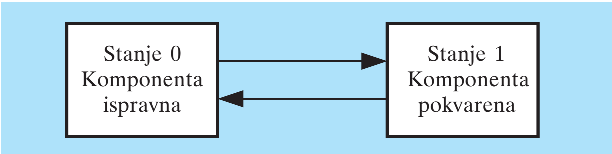
Prva faza crtanja dijagrama prostora stanja sustava je određivanje svih stanja sustava, odnosno svih stanja u kojima se sustav može nalaziti. Pritom stanje sustava predstavlja situaciju u kojoj se sustav može naći s obzirom na status raspoloživosti svojih komponenata. Jednostavnije rečeno, svako od stanja sustava predstavlja određenu situaciju u kojoj sustav možemo zateći s obzirom na pokvarenost i ispravnost njegovih komponenata. Na primjer, za sustav koji se sastoji od samo jedne komponente, stanja u kojima se takav sustav može nalaziti su stanje kvara kada je komponenta pokvarena i stanje ispravnog rada kada je komponenta ispravna, kako je prikazano na slici 1. Na slici je stanje kvara označeno kao stanje 1, a stanje ispravnog rada kao stanje 0. Vidimo da svako stanje sustava sadržava skup informacija o radnoj sposobnosti sustava da ispunjava svoje zadatke. Stanja sustava predstavljaju skup elementarnih događaja koji su međusobno isključivi, što znači da se sustav ne može istodobno nalaziti u dva ili više stanja. U prikazanom slučaju sustava od jedne komponente, to znači da sustav ne može istodobno biti ispravan i pokvaren, što je i logično.

Drugi je korak u crtanju dijagrama prostora stanja crtanje prijelaza između pojedinih stanja. Logično je da sustav tijekom svog životnog vijeka neće uvijek boraviti u jednom te istom stanju, nego će pod utjecajem slučajnih događaja kvara i popravka mijenjati svoja stanja, odnosno prelaziti iz jednih stanja u druga. Prema tome, sustav se u nekom stanju zadržava onoliko dugo dok ga slučajan događaj kvara ili popravka ne prevede u drugo stanje, odnosno dok mu slučajan događaj ne promijeni osobine na taj način da prijeđe u drugo stanje. Zbog toga se može kazati da prijelazi između stanja predstavljaju putove, odnosno načine na koje sustav može prelaziti iz pojedinih stanja u neka druga. Drugačije rečeno, prijelazi između stanja povezuju pojedina stanja ukazujući time u koja stanja sustav može prijeći iz nekog stanja, odnosno iz kojih stanja sustav može dospjeti u neko stanje. U prikazanom primjeru sustava od jedne komponente zna se da se ona može pokvariti, odnosno prijeći iz stanja ispravnog rada 0 u stanje kvara 1. Taj je prijelaz prikazan strelicom iz stanja 0 u stanje 1 kako je prikazano na slici 1. Ukoliko se komponenta može popravljati, tada

https://doi.org/10.37798/2003525573

nakon popravka pokvarene komponente sustav prelazi iz stanja 1 u stanje 0, a taj je prijelaz na slici 1 prikazan strelicom iz stanja 1 u stanje 0.

Iz života je poznato da se različite komponente različito brzo kvare, odnosno da se neke komponente kvare brže od drugih. Zbog toga nam je za cjelovit opis prijelaza potrebna veličina koja će biti mjera brzine kvara dotične komponente. Kao prikladna veličina koja opisuje brzinu kvara neke komponente uzeta je učestalost kvara. Ona predstavlja relativan broj kvarova, s obzirom na broj ispravnih komponenata, po vremenskom intervalu, pa po svojoj definiciji i nije ništa drugo nego brzina kvara. Kao mjera koja karakterizira brzinu kvara dotične komponente, na slici 1 je iznad strelice prijelaza iz stanja 0 u stanje 1 upisana vrijednost. Slično razmatranje može se provesti i za brzinu popravka dotične komponente, odnosno učestalost popravka. Ta veličina također predstavlja relativan broj popravaka, s obzirom na broj pokvarenih komponenata, po intervalu vremena. Na slici 1 ona je upisana kraj strelice prijelaza iz stanja 1 u stanje 0 kao veličina brzine popravka dotične komponente. Učestalost kvara komponente i učestalost popravka komponente nazivaju se zajedničkim imenom učestalosti prijelaza između pojedinih stanja sustava ili jednostavno učestalosti prijelaza.



Slika 1. Dijagram prostora stanja sustava od jedne popravljive komponente

Prema tome, kako bi se postigla bolja preglednost problema i jednostavan ispis sustava jednadžbi Markovljevog procesa poželjno je prvo nacrtati odgovarajući dijagram prostora stanja sustava i unijeti pripadajuće učestalosti prijelaza. U takav dijagram trebaju biti uključena sva odgovarajuća stanja u kojima se sustav može nalaziti, odnosno boraviti i svi mogući prijelazi između pojedinih stanja. Broj stanja i prijelaza ovisi o konkretnom sustavu, odnosno problemu koji se razmatra.

Iz svega navedenog slijedi da je izrada dijagrama prostora stanja sustava najvažnija faza rješavanja problema jer predstavlja slikovni prikaz problema, odnosno prevodi inženjersko znanje o radu sustava u matematički model na koji se zatim primjenjuju matematičke metode rješavanja Markovljevih procesa.

Prilikom izrade dijagrama prostora stanja sustava potrebno je vršiti inženjerske prosudbe, a za to je nužno potpuno i iscrpno razumijevanje fizikalnog ponašanja i logičkih operacija sustava, jer ne postoje nikakvi matematički modeli, pravila ili sheme koje bi to nadomjestile ili eliminirale. U ovom su članku predstavljene metode, odnosno matematički alati koji primijenjeni na dijagram prostora stanja sustava omogućuju proračun osnovnih stohastičkih veličina sustava.

Treba naglasiti da se skup svih stanja u kojima sustav ispravno radi naziva stanje ispravnog rada sustava, a skup svih stanja u kojima je sustav pokvaren naziva se stanje kvara sustava. Stanje ispravnog rada sustava i stanje kvara sustava zajedničkim se imenom nazivaju opća stanja sustava. Za razliku od njih pojedinačna stanja sustava su ona koja tvore dijagram prostora stanja i u daljnjem se tekstu nazivaju jednostavno stanja sustava. Prema tome, može se reći da opće stanje sustava predstavlja skup takvih pojedinačnih stanja koja izazivaju jednake posljedice na sposobnost rada sustava.

Već ranije je spomenuto da svako od stanja sustava predstavlja određenu situaciju u kojoj se sustav može zateći. S obzirom da su stanja sustava, odnosno situacije u kojima se sustav može naći stohastički događaji, oni imaju određenu vjerojatnost. Stanja sustava su i međusobno isključivi događaji, pa je zbog toga vjerojatnost općeg stanja sustava jednaka zbroju vjerojatnosti pojedinačnih stanja koja ga sačinjavaju. Prema tome, vjerojatnost ispravnog rada sustava dobiva se zbrajanjem vjerojatnosti svih pojedinačnih stanja sustava u kojima sustav ispravno radi. Na istom se principu dobiva vjerojatnost kvara sustava.

Jasno je da, ovisno o mrežnoj strukturi sustava, postoji značajna razlika kako u izgledu dijagrama prostora stanja sustava, tako i u tome koja stanja predstavljaju ispravan rad, odnosno kvar sustava. Pod mrežnom strukturom sustava podrazumijeva se način spoja komponenata koje sačinjavaju sustav.

Broj stanja u dijagramu prostora stanja sustava raste s porastom broja komponenata sustava i porastom broja stanja u kojima pojedina komponenta sustava može boraviti. Za sustav od n paralelno spojenih komponenata od kojih svaka može poprimiti jedno od 2 moguća stanja, stanje ispravnog rada i stanje kvara komponente, dobiva se dijagram prostora stanja sustava u kojem broj stanja iznosi 2^n.

Očito je da veliki broj komponenata u sustavu, uzrokuje golem broj stanja u dijagramu prostora stanja sustava. Zbog toga je s dijagramom prostora stanja takvog sustava vrlo teško upravljati.

Dva su rješenja kojima se služimo u takvim slučajevima. Prvo se svodi na smanjenje broja stanja. Ovaj pristup se zasniva na upotrebi inženjerskih prosudbi temeljenih na iskustvu, kako bi se smanjio broj mogućih stanja sustava zanemarivanjem onih stanja koja imaju vrlo malu vjerojatnost događanja. Drugo rješenje svodi se na cijepanje sustava na dijelove, odnosno podsustave, koji se zatim analiziraju kao zasebne cjeline, odnosno sustavi. Nakon izračunavanja pokazatelja pouzdanosti podsustava crta se dijagram prostora stanja cijelog sustava u kojem se svaki podsustav predstavlja kao jedna komponenta. Pritom treba naglasiti da oba navedena principa spadaju u aproksimativne metode rješavanja.

3. VJEROJATNOSTI STANJA SUSTAVA

3.1. Opći pojmovi

U prethodnom odjeljku objašnjen je dijagram prostora stanja sustava koji predstavlja slikovni prikaz stohastičkog procesa koji se odvija u sustavu. Pri tome je spomenuto da svako stanje iz dijagrama prostora stanja ima pripadajuću vjerojatnost nastupanja, odnosno događanja. Drugim riječima, za svako stanje sustava postoji određena vjerojatnost da se sustav zatekne u njemu. Jedan od temeljnih pokazatelja pouzdanosti sustava upravo su vjerojatnosti nastupanja pojedinih stanja sustava. Zbog toga će se u ovom poglavlju prikazati metode izračunavanja vjerojatnosti stanja sustava.

S obzirom da će se stohastički proces unutar sustava, odnosno stohastičko ponašanje sustava opisivati Markovljevim procesom, prije svega je potrebno objasniti temeljne osobine Markovljeva procesa. Pritom je potrebno naglasiti da će se opisati samo najnužniji pojmovi i osobine Markovljevog procesa koji su prijeko potrebni za razumijevanje i uporabu istog.

Markovljev proces pripada stohastičkim procesima koji se mogu opisati dvjema slučajnim veličinama. To su, kako se i ranije moglo naslutiti, stanje sustava i vrijeme promatranja sustava. Svaka od spomenutih slučajnih veličina može biti diskretna ili kontinuirana. U slučaju Markovljeva procesa radi se o stohastičkom procesu kod kojeg su stanja sustava diskretna, a vrijeme promatranja kontinuirano.

Općenito za stohastičke procese vrijedi da vjerojatnost boravka sustava u danom trenutku u nekom od svojih stanja ovisi o povijesti procesa, odnosno o ponašanju sustava od početka procesa pa do promatranog trenutka.

Jedna od najbitnijih osobina Markovljevog procesa, koja ga izdvaja od ostalih stohastičkih procesa, jest ta da vjerojatnost boravka sustava X u nekom stanju j u trenutku $t+\Delta t$ ovisi samo o stanju i u kojem je sustav boravio u trenutku t, a ne ovisi o tome u kojim je stanjima sustav boravio prije trenutka t.

Zbog te osobine Markovljevih procesa od goleme važnosti postaje prijelazna vjerojatnost p_{ij}. To je vjerojatnost da će sustav X koji je u trenutku t boravio u stanju i, u trenutku $t+\Delta t$ boraviti u stanju j, odnosno može se pisati

$$P(X(t \quad t) \quad j/X(t) \quad i) \quad p_{ij} \qquad (1)$$

U daljnjem će se radu s Markovljevim procesima smatrati da se sve komponente sustava nalaze unutar korisnog životnog perioda, odnosno unutar faze normalnog rada. U tom dijelu životnog vijeka komponente učestalosti kvara i popravka komponenata su konstantni, odnosno vjerojatnosti kvara i popravka komponente predstavljene su eksponencijalnom razdiobom. To znači da je funkcija gustoće razdiobe vjerojatnosti kvara komponente

$$f(t) \quad e^{-\ t} \qquad (2)$$

a funkcija razdiobe vjerojatnosti kvara komponente

$$Q(t) \quad 1-e^{-\ t} \qquad (3)$$

Ako je komponenta s eksponencijalnom razdiobom kvara ispravno radila do trenutka t, može se pokazati da vjerojatnost da će se komponenta pokvariti u idućem intervalu Δt iznosi

$$Q(\ t) \quad 1-e^{-\ t} \quad 1-1- \quad t \quad \frac{(\ t)^2}{2!} - \frac{(\ t)^3}{3!} \ \ldots \qquad (4)$$

Slučajni događaj popravka komponente također je opisan eksponencijalnom razdiobom, pa se odgovarajuće funkcije popravka komponente dobivaju tako da se u jednadžbama 2, 3 i 4 učestalost kvara λ zamijeni s učestalošću popravka μ.

Prema tome, odabirom dovoljno malenog intervala Δt, viši članovi reda u jednadžbi 4 mogu se zanemariti, pa veličina $\lambda\Delta t$ predstavlja vjerojatnost kvara komponente unutar intervala $(t, t+\Delta t)$ uz uvjet da je do trenutka t komponenta radila ispravno.

Ako sa λ_{ij} označimo učestalost prijelaza iz stanja i u stanje j, prijelazna vjerojatnost p_{ij} može se pisati kao

$$P(X(t \quad t) \quad j/X(t) \quad i) \quad _{ij} \ t \quad p_{ij}(\ t) \qquad (5)$$

Vidi se da za sustave čije komponente imaju konstantne učestalosti kvara i popravka, uz odabir dovoljno malenog intervala Δt dobivamo prijelaznu vjerojatnost koja ne ovisi o trenutku promatranja t nego samo o duljini vremenskog intervala Δt.

Markovljevi procesi kod kojih prijelazne vjerojatnosti ne ovise trenutku promatranja t, nego samo o duljini vremenskog intervala Δt između dvaju trenutaka, nazivaju se homogeni Markovljevi procesi. Ta se homogenost Markovljeva procesa postigla uz pretpostavku konstantnih učestalosti kvara i popravka komponenata i odabir dovoljno malenog intervala Δt. Stoga to treba imati na umu, s obzirom da će se u daljnjim razmatranjima za opis stohastičkih procesa u sustavima koristiti upravo homogeni Markovljevi procesi.

Postoji još jedna bitna pretpostavka koja će se upotrebljavati pri izvodu, odnosno raspisivanju jednadžbi Markovljeva procesa. Ona je već ranije spominjana, a i u skladu je s prethodnim pretpostavkama. Ta pretpostavka podrazumijeva da je vremenski interval Δt uzet dovoljno malen, odnosno toliko malen da je za vrijeme njegova trajanja vjerojatnost događanja dvaju ili više prijelaza jednaka nuli.

Takva se pretpostavka može i matematički opravdati s obzirom da se za prijelaznu vjerojatnost događanja dvaju prijelaza unutar intervala Δt dobiva umnožak $\lambda\Delta t \cdot \lambda\Delta t = \lambda^2(\Delta t)^2$. Taj umnožak predstavlja infinitezimalnu veličinu drugog reda koja se može zanemariti.

Ta pretpostavka ne znači da se ne može zbiti događaj koji za posljedicu ima isključenje dvaju ili više komponenata sustava. Drugim riječima, zanemarivanje događanja dvaju događaja unutar intervala Δt, nema nikakve veze s kvarom više komponenata uslijed jednog događaja, odnosno zajedničkog uzroka.

3.2. Izračunavanje vremenski ovisnih vjerojatnosti stanja sustava

Za sustav od jedne popravljive komponente dijagram prostora stanja prikazan je na slici 1. Neka za spomenuti sustav vrijede sljedeće oznake:

$P_0(t)$ – vjerojatnost da je u trenutku t komponenta ispravna

$P_1(t)$ – vjerojatnost da je u trenutku t komponenta pokvarena

t – interval vremena dovoljno malen da se unutar njega ne mogu dogoditi dva ili više prijelaza.

Postoje dva moguća načina da se komponenta u trenutku $t+\Delta t$ zatekne u ispravnom stanju. Prvi način pretpostavlja da je u trenutku t komponenta bila ispravna i da se tijekom intervala Δt nije pokvarila. Drugi pak način pretpostavlja da je u trenutku t komponenta bila pokvarena i da je završetak njenog popravka nastao unutar intervala Δt. Dva spomenuta načina zatjecanja sustava u ispravnom stanju u trenutku $t+\Delta t$ predstavljaju dva međusobno isključiva događaja.

Zbog toga se vjerojatnost zatjecanja sustava u ispravnom stanju u trenutku $t+\Delta t$ dobiva zbrajanjem vjerojatnosti događanja dvaju spomenutih načina, odnosno

[Vjerojatnost boravka komponente u ispravnom stanju u trenutku $t+\Delta t$] =

[Vjerojatnost da je komponenta bila ispravna u trenutku t i nije se pokvarila unutar intervala Δt] + [Vjerojatnost da je komponenta bila pokvarena u trenutku t i da je završetak popravka nastao unutar intervala Δt]

S obzirom na prikazani dijagram prostora stanja sustava na slici 1 i uvođenjem pojmova opisanih u prethodnom odjeljku, gore navedena jednadžba može se prikazati u sljedećem matematičkom obliku

$$P_0(t \quad t) \quad P_0(t)(1- \quad t) \quad P_1(t)(\quad t) \tag{6a}$$

Na istom principu može se napisati jednadžba za vjerojatnost boravka komponente u pokvarenom stanju u trenutku $t+\Delta t$

$$P_1(t \quad t) \quad P_1(t)(1- \quad t) \quad P_0(t)(\quad t) \tag{6b}$$

Ako jednadžbe 6 razmatranog sustava od jedne popravljive komponente prikažemo u matričnoj formi dobiva se

$$P_0 \; t \quad t \;\; P_1 \; t \quad t \qquad P_0(t) \;\; P_1(t) \quad \begin{matrix} 1- \quad t & t \\ t & 1- \quad t \end{matrix} \tag{7}$$

Korištenjem simbola matrični se izraz može zapisati još kraće, odnosno

$$\boldsymbol{P}(t+\Delta t)=\boldsymbol{P}(t)\times \boldsymbol{P}_{ij}(\Delta t) \tag{8}$$

Pri tome $\boldsymbol{P}(t+\Delta t)$ označava vektor vremenski ovisnih vjerojatnosti stanja u trenutku $t+\Delta t$, a $\boldsymbol{P}(t)$ označava vektor vremenski ovisnih vjerojatnosti stanja u trenutku t. Elementi matrice $\boldsymbol{P}_{ij}(\Delta t)$ predstavljaju vjerojatnosti prijelaza sustava iz stanja i u stanje j unutar intervala t. Zbog toga se matrica $\boldsymbol{P}_{ij}(\Delta t)$ naziva stohastička matrica prijelaznih vjerojatnosti. Dijagonalni elementi matrice također se nazivaju prijelaznim vjerojatnostima iako predstavljaju vjerojatnost ostanka sustava u stanju i unutar intervala t. Za stohastičku matricu prijelaznih vjerojatnosti je karakteristično da joj je suma svih elemenata bilo kojeg retka jednaka jedan. Drugim riječima, suma svih vjerojatnosti prijelaza iz nekog stanja sustava, uključujući i vjerojatnost ostanka sustava u tom stanju, jednaka je jedan zbog toga što sustav unutar intervala t mora ili napustiti promatrano stanje ili ostati u njemu.

Ako se sa λ_{ij} označi učestalost prijelaza iz stanja i u stanje j, tada se za stohastičku matricu prijelaznih vjerojatnosti sustava od n stanja općenito može pisati da je

$$\boldsymbol{P}_{ij}(\ddot{A}t) \quad \begin{matrix} 1-\sum\limits_{j=2}^{n} {}_{1j}\ddot{A}t & \cdots & {}_{1i}\ddot{A}t & \cdots & {}_{1n}\ddot{A}t \\ \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ {}_{i1}\ddot{A}t & \cdots & 1 \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \; i}}^{n} {}_{ij}\ddot{A}t & \cdots & {}_{in}\ddot{A}t \\ \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}_{n1}\ddot{A}t & \cdots & {}_{ni}\ddot{A}t & \cdots & 1-\sum\limits_{j=1}^{n-1} {}_{nj}\ddot{A}t \end{matrix} \tag{9}$$

Dijeljenjem jednadžbe 6a sa Δt i sređivanjem izraza dobiva se

$$\frac{P_0(t \quad t)-P_0(t)}{t} \quad - P_0(t) \quad P_1(t) \tag{10}$$

Neka se uzme da je interval Δt infinitezimalno mali, odnosno neka se pusti da interval $\Delta t \to 0$. Tada granična vrijednost, odnosno limes lijeve strane jednadžbe postaje prva derivacija vjerojatnosti stanja 0 u trenutku t.

$$\lim_{t \quad 0} \frac{P_0(t \quad t)-P_0(t)}{t} \quad \frac{dP_0(t)}{\mathrm{d}t} \quad P_0^{'}(t) \tag{11}$$

Uzevši to u obzir sada se može jednadžba 6a napisati u sljedećem obliku

$$P_0^{'}(t) \quad - P_0(t) \quad P_1(t) \tag{12a}$$

Po istom principu za jednadžbu 6b dobiva se sljedeći izraz

$$P_1^{'}(t) \quad - P_0(t) \quad P_1(t) \tag{12b}$$

Osim stohastičke matrice prijelaznih vjerojatnosti, javlja se još jedna matrica bitna za Markovljeve procese. Ta se matrica dobiva ispisivanjem diferencijalnih jednadžbi Markovljeva procesa u matričnom obliku.

Ako diferencijalne jednadžbe 12 razmatranog sustava od jedne popravljive komponente prikažemo u matričnoj formi dobiva se

$$P_0^{'}(t) \quad P_1^{'}(t) \quad P_0^{'}(t) \quad P_1(t) \quad \begin{matrix} - & \\ & - \end{matrix} \tag{13}$$

Korištenjem simbola matrični se izraz može zapisati još kraće, odnosno

$$\boldsymbol{P}'(t)=\boldsymbol{P}(t)\times \Lambda_{ij} \tag{14}$$

Pri tome $\boldsymbol{P}'(t)$ označava vektor prve derivacije vremenski ovisnih vjerojatnosti stanja u trenutku t, a $\boldsymbol{P}(t)$ označava vektor vremenski ovisnih vjerojatnosti stanja u trenutku t. Izvandijagonalni elementi matrice Λ_{ij} predstavljaju učestalosti prijelaza sustava iz stanja i u stanje j. Zbog toga se matrica Λ_{ij} naziva matrica učestalosti prijelaza. Dijagonalni element matrice Λ_{ij} u nekom retku predstavlja negativnu sumu svih učestalosti prijelaza u tom retku.

Za matricu učestalosti prijelaza je karakteristično da joj je suma svih elemenata bilo kojeg retka jednaka nuli.

Ako se sa Λ_{ij} označi učestalost prijelaza iz stanja i u stanje j, tada se za matricu učestalosti prijelaza sustava od n stanja općenito može pisati da je

$$\Lambda_{ij} = \begin{bmatrix} -\sum_{j=2}^{n} \lambda_{1j} & \cdots & \lambda_{1i} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_{i1} & \cdots & -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_{ij} & \cdots & \lambda_{in} \\ \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{ni} & \cdots & -\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{nj} \end{bmatrix} \qquad (15)$$

Jednadžbe 12 su linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima. Postoje brojni načini pomoću kojih se takve jednadžbe mogu riješiti, ali jedna od najlakših i najčešće korištenih metoda je Laplaceova transformacija.

U svakom slučaju za vremenski ovisne vjerojatnosti stanja sustava dobivaju se sljedeći izrazi

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left[P_0(0) + P_1(0)\right] + \frac{e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu}\left[\lambda P_0(0) - \mu P_1(0)\right] \qquad (16a)$$

$$P_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left[P_0(0) + P_1(0)\right] + \frac{e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu}\left[\mu P_1(0) - \lambda P_0(0)\right] \qquad (16b)$$

Pri tom $P_0(0)$ i $P_1(0)$ označavaju početne vjerojatnosti stanja, odnosno vjerojatnosti stanja u trenutku $t=0$.

3.3. Izračunavanje stacionarnih vjerojatnosti stanja sustava

U prethodnom odjeljku izračunate su vremenski ovisne vjerojatnosti stanja sustava. Može se primijetiti da su vremenski ovisne vjerojatnosti stanja sačinjene od konstantnog (vremenski neovisnog) člana i vremenski ovisnog člana. Vremenski ovisni član je eksponencijalna funkcija vremena i njegova vrijednost opada s porastom vremena. Drugim riječima, vremenski ovisni član iščezava kada vrijeme t teži u beskonačnost. Zbog toga vjerojatnost stanja s porastom vremena t teži konstantnoj vrijednosti. Granična vrijednost, odnosno limes vjerojatnosti stanja kada vrijeme teži u beskonačnost, naziva se stacionarna vjerojatnost stanja. Ili drugačije rečeno, stacionarna vjerojatnost stanja je vjerojatnost stanja u trenutku $t=\infty$. Općenito vrijedi da vrijednosti stacionarnih vjerojatnosti stanja sustava ne ovise o početnim uvjetima procesa, odnosno o vjerojatnostima stanja sustava u početnom trenutku.

Velika većina procesa, kao što su procesi u elektroenergetskim sustavima, odvijaju se „dovoljno dugo" tako da vremenski ovisna vjerojatnost stanja za „relativno kratko vrijeme" doseže takvu vrijednost da razlika između nje i vrijednosti stacionarne vjerojatnosti stanja postaje praktično zanemariva. Prema tome, ako se izuzme kratak početni period trajanja prijelaznih pojava, tada se može u gotovo cijelom vremenskom području promatranja sustava vremenski ovisna vjerojatnost stanja gotovo potpuno točno aproksimirati vrijednošću stacionarne vjerojatnosti stanja. Općenito je duljina trajanja početnog perioda prijelaznih pojava kraća za veće vrijednosti intenziteta prijelaza.

Za ergodične sustave s konačnim učestalostima prijelaza stacionarne vjerojatnosti svih stanja su različite od nule.

Sustav je ergodičan ukoliko postoje takvi prijelazi između pojedinih stanja sustava koji omogućavaju da sustav iz svakog svog stanja može doći u svako od preostalih stanja sustava, bilo direktnim prijelazom, bilo indirektno, odnosno prijelazima preko drugih stanja. Ergodičnost sustava se može definirati i kao karakteristika sustava da unutar njegova dijagrama prostora stanja ne postoji stanje ili skup stanja koji se ne mogu napustiti nakon što sustav u njih dospije. Takvo stanje sustava, koje se ne može napustiti naziva se apsorpcijsko stanje. Može se reći i obratno, da nakon ulaska u apsorpcijsko stanje sustav u njemu ostaje boraviti cijelo vrijeme.

Postoji više metoda izračunavanja stacionarnih vjerojatnosti stanja. Jedna je od njih ta da se prvo izračunaju vremenski ovisne vjerojatnosti stanja, a zatim se traži granična vrijednost, odnosno limes tih vjerojatnosti kada vrijeme t teži u beskonačnost.

Druga, još jednostavnija metoda izračunavanja stacionarnih vjerojatnosti stanja zasniva se na uporabi matrice učestalosti prijelaza, odnosno jednadžbe 14. Za izračunavanje stacionarnih vjerojatnosti stanja sustava na ovaj način nije potrebno prethodno izračunavanje vremenski ovisnih vjerojatnosti stanja. Ako se pusti da vrijeme t teži u beskonačnost tada vremenski ovisne vjerojatnosti stanja asimptotski teže konstantnim vrijednostima, odnosno stacionarnim vjerojatnostima stanja. Zbog toga prve derivacije vremenski ovisnih vjerojatnosti stanja teže nuli. Primjenom tog zaključka na jednadžbu 14 dobiva se sljedeći izraz

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{P} \times \Lambda_{ij} \qquad (17)$$

Stacionarne vjerojatnosti stanja sustava mogu se dobiti i sljedećim razmatranjem. S obzirom da stacionarne vjerojatnosti stanja sustava imaju konstantne vrijednosti, one ne ovise o promjeni vremena t. To znači da vektor stacionarnih vjerojatnosti stanja ostaje nepromijenjen kada se množi sa stohastičkom matricom prijelaznih vjerojatnosti. Ako se s $\boldsymbol{P}$ označi vektor stacionarnih vjerojatnosti stanja sustava, tada se jednadžba 8 može napisati kao

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{P}_{ij}(\Delta t) \tag{18}$$

Raspisivanjem jednadžbi 18 u eksplicitnom obliku, i njihovim sređivanjem dobivaju se jednadžbe 17, pa se prema tome spomenuto razmatranje opet svodi na prethodnu metodu.

Prema tome, korištenjem matrice učestalosti prijelaza direktno se dobiva sustav jednadžbi za izračunavanje stacionarnih vjerojatnosti stanja. Sustav jednadžbi 17 predstavlja sustav od n linearnih jednadžbi s n nepoznanica. Međutim, svih n jednadžbi nije međusobno linearno nevisno, nego je samo n-1 jednadžba linearno nevisna. Drugim riječima, nedostaje jedna jednadžba da bi se izračunale stacionarne vjerojatnosti stanja.

S obzirom da se sustav u svakom trenutku mora nalaziti u jednom od svojih stanja slijedi da u svakom trenutku, pa i u trenutku $t=\infty$, zbroj vjerojatnosti svih stanja sustava mora biti jednak jedan. To znači da za sustav od n stanja, za bilo koji odabrani trenutak t, vrijedi da je

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(t) = 1 \tag{19}$$

Ako se za trenutak promatranja uzme $t=\infty$, vjerojatnosti stanja su stacionarne, pa slijedi da zbroj stacionarnih vjerojatnosti svih stanja mora biti jednak jedinici. Prema tome, općenito se za sustav od n stanja može pisati da je

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1 \tag{20}$$

Ta je jednadžba linearno neovisna sa svim ostalim jednadžbama. Zbog toga treba bilo koju jednadžbu sustava 17 zamijeniti s jednadžbom koja izražava da je zbroj stacionarnih vjerojatnosti svih stanja jednak jedan. Drugim riječima, bilo koji stupac matrice prijelaznih intenziteta treba zamijeniti s jediničnim stupcem, odnosno stupcem u kojemu svi elementi imaju vrijednost jedan, a nulu njemu odgovarajućeg stupca u vektoru s lijeve strane treba također zamijeniti s jedinicom. Ubacivanjem spomenute jednadžbe umjesto bilo koje od n linearnih jednadžbi iz sustava 17, dobiva se sustav od n linearno neovisnih jednadžbi s n nepoznanica, čije se rješavanje može provesti jednom od mnogobrojnih matematičkih metoda.

Bez obzira na metodu rješavanja, za stacionarne vjerojatnosti stanja sustava od jedne popravljive komponente dobiva se

$$P_0 = P_0(\infty) = \lim_{t\to\infty} P_0(t) = \frac{\quad}{\quad} \tag{21a}$$

$$P_1 = P_1(\infty) = \lim_{t\to\infty} P_1(t) = \frac{\quad}{\quad} \tag{21b}$$

Spomenuto je da će se pri opisu Markovljeva procesa razmatrati sustavi čije komponente imaju konstantne učestalosti prijelaza. Drugim riječima, za sve komponente sustava vrijede eksponencijalne razdiobe kvara i popravka. Može se pokazati da je za komponentu s eksponencijalnom razdiobom kvara očekivano, odnosno srednje vrijeme do kvara komponente inverzna vrijednost učestalosti kvara.

$$E(T) = \int_t tf(t)dt = \int_0^\infty t\,\lambda e^{-\lambda t}dt = 1/\lambda \tag{22}$$

Isto tako vrijedi da komponenta s eksponencijalnom razdiobom popravka ima očekivano, odnosno srednje vrijeme do popravka jednako inverznoj vrijednosti učestalosti popravka. Ako s $MTTF$ i m označimo srednje vrijeme do kvara, a sa $MTTR$ i r srednje vrijeme do popravka komponente, za komponente sustava slijedi da je

$$MTTF = m = 1/\lambda \tag{23a}$$

$$MTTR = r = 1/\mu \tag{23b}$$

Supstitucijom jednadžbi 23 u jednadžbe 21 za stacionarne vjerojatnosti stanja sustava od jedne popravljive komponente dobiva se da je

$$P_0 = \frac{m}{m+r} \tag{24a}$$

$$P_1 = \frac{r}{m+r} \tag{24b}$$

Vidi se, a to vrijedi i općenito da stacionarna vjerojatnost stanja predstavlja omjer srednjeg vremena boravka u dotičnom stanju i zbroja srednjeg vremena boravka u dotičnom stanju i srednjeg vremena boravka izvan njega.

U slučaju sustava od jedne popravljive komponente, srednje vrijeme do kvara komponente predstavlja i srednje vrijeme boravka sustava u ispravnom stanju, a srednje vrijeme do popravka komponente ujedno je i srednje vrijeme boravka sustava u stanju kvara. Zbog toga su stacionarne vjerojatnosti stanja sustava od jedne popravljive komponente izražene pomoću srednjih vremena do kvara i popravka komponente. Međutim, općenito ne vrijedi da je srednje vrijeme boravka sustava u nekom od svojih stanja jednako srednjem vremenu do kvara ili do popravka komponente. Računanje srednjih vremena boravka u stanjima sustava detaljnije će biti opisano u kasnijim odjeljcima.

Općenito se može reći da je pouzdanost komponente (ili sustava) matematička vjerojatnost da će komponenta (ili sustav) zadovoljavajuće, odnosno ispravno raditi tijekom predviđenog vremenskog razdoblja uz definirane radne uvijete. Jednostavnije rečeno, pouzdanost komponente (ili sustava) je vjerojatnost ispravnog rada komponente (ili sustava) tijekom vremena t uz uvjet da je komponenta (ili sustav) u trenutku $t=0$ započela rad u ispravnom stanju.

Za razliku od pouzdanosti, raspoloživost komponente (ili sustava) predstavlja vjerojatnost ispravnog rada komponente (ili sustava) u trenutku t, odnosno to je vremenski ovisna vjerojatnost stanja ispravnog rada komponente (ili sustava). Općenito se može kazati da raspoloživost predstavlja matematičku vjerojatnost da će komponenata (ili sustav) zadovoljavajuće, odnosno ispravno raditi u trenutku promatranja t.

Granična vrijednost raspoloživosti kada vrijeme t teži u beskonačnost naziva se stacionarna ili granična raspoloživost.

Dakle, očita je razlika između pojmova pouzdanosti i raspoloživosti. Raspoloživost predstavlja vjerojatnost ispravnog rada u promatranom trenutku t, dok pouzdanost predstavlja vjerojatnost ispravnog rada tijekom vremenskog intervala t.

Slična se pojmovna veza može povući između nepouzdanosti i neraspoloživosti.

3.4. Numerička metoda izračunavanja vremenski ovisnih vjerojatnosti stanja

Ova metoda služi za izračunavanje vremenski ovisnih vjerojatnosti stanja, a temelji se na primjeni jednadžbe 8. Princip izrade stohastičke matrice prijelaznih vjerojatnosti prikazan je izrazom 9.

Pri tom se za veličinu intervala vremena Δt treba izabrati takva vrijednost da je vjerojatnost događanja dvaju ili više prijelaza između stanja sustava tijekom vremenskog intervala Δt zanemariva. Naravno da izbor vrijednosti Δt zahtijeva temeljito poznavanje sustava koji se analizira, odnosno poznavanje učestalosti prijelaza u njemu. Zbog toga je i logično da nema nekih općih pravila pri izboru vrijednosti Δt, a koja su primjenjiva na sve sustave.

Nakon što se u stohastičku matricu prijelaznih vjerojatnosti uvrste numeričke vrijednosti intervala vremena Δt i učestalosti prijelaza, vremenski ovisne vjerojatnosti stanja u trenutku t dobiju se množenjem vektora vjerojatnosti stanja u trenutku $t=0$ sa stohastičkom matricom prijelaznih vjerojatnosti dignutom na n-tu potenciju, gdje n predstavlja višekratnik intervala vremena Δt u promatranom vremenu t, odnosno $n=\Delta t/t$. Dakle, vremenski ovisne vjerojatnosti stanja sustava u trenutku t dobivaju se upotrebom jednadžbe

$$\boldsymbol{P}(t \quad t) \quad \boldsymbol{P}(t) \quad \boldsymbol{P}_{ij}(\quad t) \quad \boldsymbol{P}(0) \quad \boldsymbol{P}_{ij}^{n\ 1}(\quad t) \tag{25}$$

gdje je $n=\Delta t/t$.

S obzirom da za proračun vremenski ovisnih vjerojatnosti matricu prijelaznih vjerojatnosti treba samu sa sobom pomnožiti n puta, slijedi da broj matematičkih operacija postaje to veći što je izabrana vrijednost intervala Δt manja u odnosu na period t u kojem se promatra sustav. Međutim, za manju vrijednost intervala Δt točnost dobivenih rezultata je veća.

Ako se za određeni razmatrani sustav pojavi nesigurnost pri izboru vrijednosti Δt, preporuča se napraviti prvu procjenu Δt i izračunati vremenski ovisne vjerojatnosti stanja za tu odabranu vrijednost Δt. Zatim se uzima manja vrijednost Δt i vrši se novi proračun vremenski ovisnih vjerojatnosti stanja sustava. Nakon toga obavlja se usporedba vremenski ovisnih vjerojatnosti stanja dobivenih prvom i drugom procjenom. Ukoliko su odstupanja između dobivenih rezultata unutar zadovoljavajuće tolerancije, vrijednost intervala t je pravilno izabrana i proces se prekida, a rezultati dobiveni drugom procjenom, odnosno onom sa smanjenom vrijednošću intervala Δt uzimaju se kao konačni rezultati.

Ako su odstupanja između prve i druge procjene vrijednosti intervala Δt veća od zadovoljavajuće tolerancije obavlja se treća procjena intervala Δt i to na taj način da se za vrijednost Δt izabere još manja vrijednost od prethodne druge procjene. Zatim se uspoređuju rezultati dobiveni drugom i trećom procjenom intervala Δt. Postupak je iterativan i nastavlja se smanjivanjem vrijednosti Δt sve dok odstupanja rezultata dobivenih za dvije susjedne procjene intervala ne budu unutar zadovoljavajuće tolerancije. S obzirom da su rezultati točniji što je izabrani interval Δt manji, uvijek se nakon završetka iteracije kao konačni rezultati uzimaju oni dobiveni s najmanjom vrijednošću intervala Δt.

Svaka iduća procjena intervala Δt mora biti značajno smanjena u odnosu na prethodnu kako bi se osjetila eventualna odstupanja vremenski ovisnih vjerojatnosti zbog prevelike vrijednosti Δt. Naravno da je za očekivati ako se vrijednost Δt beznačajno smanji da će i odstupanja između rezultata biti malena. Isto tako bitno je napomenuti da izbor veličine odstupanja, odnosno zadovoljavajuće tolerancije, nakon koje se prekida iterativni postupak ovisi o željenoj preciznosti koja se namjerava postići.

S obzirom da velik broj matematičkih operacija za današnja računala ne predstavlja osobit problem, ova je metoda postala izrazito brza i mnogo jednostavnija nego metoda rješavanja diferencijalnih jednadžbi Laplaceovom transformacijom, posebice za složenije sustave. Prema tome, korištenjem ove metode i digitalnog računala, uz razuman izbor vrijednosti intervala Δt, dobivaju se rezultati sa savršeno prihvatljivom preciznošću za sve praktične primjene.

3.5. Proračun pouzdanosti sustava s popravljivim komponentama

Kao što je već rečeno, pouzdanost sustava predstavlja vjerojatnost boravka sustava u stanjima ispravnog rada sustava tijekom cijelog vremenskog intervala t. Drugim riječima, pouzdanost sustava je vjerojatnost da sustav neće ući u niti jedno stanje kvara sustava tijekom vremenskog intervala t. Za razliku od pouzdanosti sustava, zbroj vremenski ovisnih vjerojatnosti stanja ispravnog rada sustava predstavlja vjerojatnost ispravnog rada sustava u trenutku t. Zbog toga se vremenski ovisne vjerojatnosti stanja sustava ne mogu iskoristiti za proračun pouzdanosti sustava.

Da bi se izračunala pouzdanost sustava postojeći sustav je potrebno modificirati na taj način da se stohastički proces u sustavu prekine, odnosno zaustavi u trenutku ulaska sustava u bilo koje njegovo stanje kvara. To se postiže tako da se iz sustava odstrane svi prijelazi koji vode iz stanja kvara sustava, odnosno da se učestalosti tih prijelaza izjednače s nulom. Na taj je način postignuto da su stanja kvara sustava postala apsorpcijska stanja sustava. Prema tome, nakon što sustav uđe u bilo koje stanje kvara sustava, ne može više izaći iz njega i stohastički proces u sustavu se zaustavlja. Zbroj vremenski ovisnih vjerojatnosti stanja ispravnog rada tako modificiranog sustava predstavlja pouzdanost sustava.

Vremenski ovisne vjerojatnosti stanja tako modificiranog sustava računaju se korištenjem jednadžbe 14, s tim da se matrica učestalosti prijelaza mora modificirati u skladu s gore navedenim. To znači da se u matrici učestalosti prijelaza redak svakog stanja kvara sustava mora zamijeniti nul-retkom, odnosno retkom čiji su svi elementi nule.

Vrlo je teško izvesti opće jednadžbe pouzdanosti za složenije sustave koji sadrže popravljive komponente. Tada se pouzdanosti mogu dobiti rješavanjem diferencijalnih jednadžbi s numeričkim vrijednostima ili korištenjem metode množenja matrice prijelaznih vjerojatnosti kako je opisano u prethodnom odjeljku.

Prilikom korištenja metode množenja matrice prijelaznih vjerojatnosti zbog gore navedenih razloga matricu prijelaznih vjerojatnosti treba modificirati odbacivanjem učestalosti prijelaza iz stanja kvara sustava čime se postiže da stanja kvara sustava postaju apsorpcijska stanja sustava. Drugim riječima, u matrici prijelaznih vjerojatnosti redak svakog stanja kvara sustava mora se zamijeniti odgovarajućim retkom jedinične matrice, čiji je dijagonalni element iznosi jedan, a svi ostali elementi jednaki su nuli. Nakon toga, uz odabir odgovarajućeg vremenskog intervala Δt, vremenski ovisne vjerojatnosti ispravnih stanja sustava računaju se po principu prikazanom u prethodnom odjeljku. Zbroj tako dobivenih vremenski ovisnih vjerojatnosti stanja predstavlja pouzdanost sustava.

Metode opisane u ovom odjeljku ne moraju se ograničiti samo na proračun pouzdanosti sustava. Umjesto stanja ispravnog rada sustava može se izabrati bilo koji skup stanja sustava. Tada se primjenom opisane metode dobiva vjerojatnost boravka sustava unutar izabranog skupa stanja tijekom cijelog vremena t. Jednostavnije rečeno, dobiva se vjerojatnost da sustav nije napustio izabrani skup stanja tijekom vremena t.

4. SREDNJA VREMENA BORAVKA I UČESTALOSTI NASTUPANJA STANJA SUSTAVA

4.1. Uvod

Poznavanje vjerojatnosti stanja sustava nije dovoljno da bi se u potpunosti shvatilo, odnosno prikazalo ponašanje sustava. Za sustav od jedne popravljive komponente koji ima učestalost kvara 2λ i učestalost popravka 2μ, dobivamo jednake stacionarne vjerojatnosti stanja kao i kod sustava sa slike 1. Međutim, sustav s dva puta većim učestalostima prijelaza se dva puta češće (brže) kvari, ali i dva puta češće (brže) popravlja, što ima golem utjecaj na poimanje načina rada i ekonomičnost sustava.

Prema tome, za potpuno razumijevanje ponašanja sustava potrebno je proračunati dodatne pokazatelje pouzdanosti sustava. Dodatni su pokazatelji pouzdanosti sustava učestalosti nastupanja pojedinih stanja sustava i srednja vremena boravka u stanjima sustava.

4.2. Srednja vremena boravka u stanjima sustava

Srednje vrijeme do kvara sustava (*MTTF*) predstavlja srednje, odnosno očekivano vrijeme boravka sustava u stanjima ispravnog rada prije nego što prijeđe u neko od stanja kvara sustava. S obzirom da je pouzdanost vjerojatnost da će sustav tijekom cijelog intervala vremena t boraviti u stanjima ispravnog rada, srednje vrijeme do kvara sustava (*MTTF*) je dakle očekivana vrijednost upravo tog vremenskog intervala t.

Prema tome, jedan od načina izračunavanja srednjeg vremena do kvara je računanje očekivane vrijednosti funkcije pouzdanosti sustava. Ako se s $R(t)$ označi funkcija pouzdanosti sustava tada se srednje vrijeme do kvara sustava može dobiti integriranjem, odnosno

$$MTTF \qquad {}_{0}\, R(t)dt \tag{26}$$

Za upotrebu jednadžbe 26 potrebno je poznavati opći izraz za pouzdanost sustava $R(t)$. Opći izraz za pouzdanost sustava dobiva se rješavanjem diferencijalnih jednadžbi kako je opisano u prethodnom poglavlju. Međutim, dobivanje općih izraza vremenski ovisnih vjerojatnosti stanja putem rješavanja diferencijalnih jednadžbi vrlo je teško za složenije sustave.

Zbog toga se za izračunavanje srednjeg vremena do kvara češće upotrebljava druga metoda koja se temelji na modificiranju matrice učestalosti prijelaza. Matricu učestalosti prijelaza treba modificirati na taj način da se iz nje odstrane svi redci i stupci koji pripadaju stanjima kvara sustava. Ako se s Λ'_{ij} označi tako modificirana matrica učestalosti prijelaza tada se temeljna matrica $\boldsymbol{M}$ dobiva kao

$$\boldsymbol{M} \quad -1 \quad {}'_{ij}{}^{-1} \tag{27}$$

Element m_{ij} matrice $\boldsymbol{M}$ predstavlja srednje vrijeme provedeno u stanju j, uz uvjet da je proces započeo u stanju i, prije nego što je dospio u stanje kvara. Ako je sustav u trenutku $t=0$ započeo s radom u stanju i, srednje vrijeme boravka sustava u ispravnim stanjima, odnosno srednje vrijeme do kvara sustava dobiva se zbrojem svih elemenata i-tog retka.

Međutim, opisana metoda ne mora se ograničiti samo na proračun srednjeg vremena do kvara sustava.

Umjesto stanja ispravnog rada sustava može se izabrati bilo koji skup stanja sustava. Tada se primjenom opisane metode dobiva srednje, odnosno očekivano vrijeme boravka sustava unutar izabranog skupa stanja. Jednostavnije rečeno, dobiva se srednje vrijeme unutar kojeg sustav neće napustiti izabrani skup stanja.

Po istom principu, srednje vrijeme boravka u nekom stanju sustava dobiva se tako da sva ostala stanja sustava smatramo apsorpcijskim stanjima. Ako se traži srednje vrijeme boravka u i-tom stanju sustava tada nakon reduciranja matrice Λ_{ij} u njoj ostaje samo dijagonalni element i-tog retka. Zbog toga slijedi da je srednje vrijeme boravka sustava u i-tom stanju sustava

$$m_i \quad m_{ii} \quad \frac{1}{{}^{n}_{\substack{j\ 1\\ j\ i}} \quad {}_{ij}} \tag{28}$$

Drugim riječima, srednje vrijeme boravka sustava u nekom stanju jednako je inverznoj vrijednosti zbroja svih učestalosti prijelaza napuštanja toga stanja.

4.3. Učestalost nastupanja stanja sustava

Zbroj srednjeg vremena boravka unutar nekog skupa stanja i srednjeg vremena boravka izvan tog skupa stanja predstavlja period, odnosno ciklus tog skupa stanja. Prema tome, period pojavljivanja nekog skupa stanja predstavlja srednje vrijeme između dva uzastopna ulaska u razmatrani skup stanja, odnosno srednje vrijeme između dva uzastopna napuštanja razmatranog skupa stanja.

Iz jednadžbi 24 za sustav od jedne popravljive komponente vidljivo je da stacionarne vjerojatnosti stanja predstavljaju omjer srednjeg vremena boravka u tom stanju i perioda tog stanja. Općenito vrijedi da je stacionarna vjerojatnost boravka sustava u nekom skupu stanja jednaka omjeru srednjeg vremena boravka sustava u tom skupu stanja i perioda tog skupa stanja. Ako se s $P(S)$ označi stacionarna vjerojatnost skupa stanja S, s $m(S)$ srednje vrijeme boravka sustava u skupu stanja S i s $T(S)$ period skupa stanja S, može se pisati da je

$$P(S) \quad \frac{m(S)}{T(S)} \tag{29}$$

Vidljivo je da se sva razmatranja u ovom odjeljku vežu uz stacionarne vjerojatnosti stanja, odnosno uz stacionarno područje Markovljeva procesa. U slučaju neergodičnih sustava, odnosno sustava s apsorpcijskim stanjima, znamo da su stacionarne vjerojatnosti neapsorpcijskih stanja jednake nuli, pa navedena razmatranja nemaju značajnije primjene. Zbog toga će se i u daljnjem tekstu podrazumijevati da se radi o ergodičnim sustavima u stacionarnom području Markovljeva procesa.

S obzirom da period skupa stanja predstavlja srednje vrijeme između dva uzastopna ulaska u taj skup stanja, odnosno srednje vrijeme između dva uzastopna napuštanja tog skupa stanja, može se definirati učestalost (frekvencija) nastupanja tog skupa stanja kao recipročna vrijednost spomenutog perioda. Ako se s $T(S)$ označi period skupa stanja S, a s $f(S)$ učestalost nastupanja skupa stanja S, tada vrijedi da je

$$T(S) = 1/f(S) \tag{30}$$

Treba napomenuti da samo kod ergodičnih sustava u stacionarnom području Markovljeva procesa vrijedi da je učestalost ulaska u bilo koji skup stanja sustava jednaka učestalosti izlaska iz tog skupa stanja. Zbog toga se u daljnjem tekstu neće praviti razlika među tim učestalostima nego će ih se zajedničkim imenom nazivati – učestalost nastupanja skupa stanja sustava.

Supstitucijom jednadžbe 30 u jednadžbu 29 dobiva se jednadžba koja povezuje stacionarnu vjerojatnost, srednje vrijeme boravka, period i učestalost nastupanja, odnosno

$$P(S) \quad \frac{m(S)}{T(S)} \quad m(S) \;\; f(S) \tag{31}$$

Međutim, učestalost nastupanja pojedinog stanja sustava može se izračunati i na drugi način, kao umnožak stacionarne vjerojatnosti stanja sustava i zbroja svih učestalosti prijelaza napuštanja tog stanja. Prema tome, za učestalost nastupanja i-tog stanja sustava može se pisati da je

$$f_i \quad {}^{n}_{\substack{j\ 1\\ j\ i}} \; P_i \;\; {}_{ij} \quad P_i \; {}^{n}_{\substack{j\ 1\\ j\ i}} \;\; {}_{ij} \tag{32}$$

Jednadžba 32 predstavlja učestalost napuštanja i-tog stanja sustava. Ako se jednadžbe 17 za izračunavanje stacionarnih vjerojatnosti stanja raspišu u eksplicitnom obliku pokazuje se da vrijedi

$$ {}^{n}_{\substack{j\ 1\\ j\ i}} \; P_j \;\; {}_{ji} \quad P_i \; {}^{n}_{\substack{j\ 1\\ j\ i}} \;\; {}_{ij} \quad f_i \tag{33}$$

Drugim riječima, u stacionarnom području Markovljeva procesa ergodičnih sustava vrijedi da je učestalost napuštanja i-tog stanja sustava jednaka zbroju učestalosti ulaska iz svih ostalih stanja sustava u i-to stanje.

Općenito, ako sa S označimo skup stanja sustava, tada se za učestalost nastupanja promatranog skupa stanja sustava može pisati da je

$$f(S) \quad {}_{i\ S} \; P_i \; {}_{j\ S} \;\; {}_{ij} \qquad {}_{j\ S} \; P_j \; {}_{i\ S} \;\; {}_{ji} \tag{34}$$

Supstitucijom jednadžbe 32 u jednadžbu 31 dobiva se srednje vrijeme boravka u i-tom stanju sustava, odnosno

$$m_i \quad \frac{P}{f_i} \quad \frac{1}{{}^{n}_{\substack{j\ 1\\ j\ i}} \quad {}_{ij}} \tag{35}$$

Dobiveni je izraz jednak jednadžbi 28 do koje se došlo primjenom modificirane matrice učestalosti prijelaza kako je opisano u odjeljku 4.2. Uvrštavanjem jednadžbe 34 u jednadžbu 31 dobiva se srednje vrijeme boravka sustava unutar skupa stanja S, odnosno

$$m(S) \quad \frac{P(S)}{f(S)} \quad \frac{1}{\qquad_{ij}}_{\substack{i\ S\\ j\ S}} \qquad (36)$$

Prema tome, srednje vrijeme boravka sustava u skupu stanja S, jednako je recipročnoj vrijednosti zbroja učestalosti prijelaza napuštanja skupa stanja.

5. ZAKLJUČAK

Markovljeve metode proračunavanja imaju značajnu ulogu u proračunu pouzdanosti sustava. U slučaju kontinuiranih procesa vremenski ovisne vjerojatnosti stanja sustava opisane su skupom diferencijalnih jednadžbi što predstavlja značajnu poteškoću kod primjene na složene sustave. Korištenjem stohastičke matrice prijelaznih vjerojatnosti i digitalnog računala može se značajno olakšati računanje ne samo stacionarnih nego i vremenski ovisnih vjerojatnosti. Uvođenjem pojmova učestalosti i srednjeg vremena boravka opisanih dodatno se obogaćuje proračun i prikaz pokazatelja pouzdanosti sustava. Time je omogućeno, sa stajališta pouzdanosti, potpunije shvaćanje samog sustava, odnosno bolja ocjena njegovih osobina. Markovljev proces se zasniva na konstantnim učestalostima prijelaza i zbog toga je primjenjiv samo na sustave koji sadržavaju isključivo komponente s eksponencijalnim razdiobama kvara i popravka. Prema tome, opisane metode ne mogu se koristiti za proračun vremenski ovisnih vjerojatnosti, ukoliko za komponente sustava ne vrijede eksponencijalne razdiobe kvara i popravka.

LITERATURA

[1] Ž. PAUŠE: "Vjerojatnost: informacija, stohastički procesi", Školska knjiga, Zagreb, 1988.

[2] R. BILLINTON, R. ALLAN: "Reliability Evaluation of Engineering Systems", Pitman Publishing Inc., 1983

[3] N. SARAPA: "Teorija vjerojatnosti", Školska knjiga, Zagreb, 1987.

[4] V. VRANIĆ: "Vjerojatnost i statistika", Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.

[5] C. SINGH, R. BILLINTON: "System Reliability Modelling and Evaluation", Hutchinson & Co. Ltd, 1977

[6] S. NIKOLOVSKI: "Osnove analize pouzdanosti elektroenergetskog sustava", Sveučilište J. J. Strossmayera, Elektrotehnički fakultet, Osijek, 1995.

RELIABILITY PARAMETER CALCULATION OF TECHNICAL SYSTEMS USING MARKOVLJEV'S PROCESS

Markovljev's process method is suitable for calculation of technical systems' reliability parameters. Reliability parameters of technical systems are probability states in which the systems can be found, mean time of their duration and their frequency. In the paper basic methods and procedures of calculating reliability parameters of technical systems using Markovljev's process are evaluated.

DIE BERECHNUNG VON VERHÄLTNISSZAHLEN DER ZUVERLÄSSIGKEIT TECHNISCHER SYSTEME DURCH ANWENDUNG DES MARKOV-SCHEN PROZESSES

Die Methoden des Markov-schen Prozesses werden für die Berechnung von Verhältnisszahlen der Zuverlässigkeit technischer Systeme verwendet. Die Verhältnisszahlen der Zuverlässigkeit technischer Systeme sind Wahrscheinlichkeiten der Zustände welche ein System einnehmen kann, mittlere Dauer des Verweilens der Systeme in diesen Zuständen und die Häufigkeit des Vorkomens dieser Zustände. Im Artikel werden Grundmethoden und Berechningsverfahren von Verhältnisszahlen der Zuverlässigkeit technischer Systeme mittels Methoden des Markov-schen Prozesses erläutert.

Naslov pisca:

Emil Vilenica, dipl. ing.
EKONERG – Institut za energetiku i zaštitu okoliša,
Koranska 5, 10000 Zagreb
Hrvatska

Uredništvo primilo rukopis:
2003 – 05 – 22.