

O STATISTIČKIM SVOJSTVIMA IMPULSNOG ŠUMA NA DISTRIBUCIJSKOJ MREŽI

Mr. sc. Dubravko S a b o l i ć, Zagreb

UDK 621.316.1:621.398.052
PRETHODNO PRIOPĆENJE

Na temelju podataka iz literature izvode se alternativni matematički modeli stohastičkih razdioba amplitude i trajanja paketa impulsnih smetnji na PLC mediju, kao i vremenskog razmaka između susjednih paketa.

Ključne riječi: impulsni šum, distribucijska mreža, funkcija razdiobe.

Uvod

U ovome članku raspravlja se o statističkim svojstvima impulsnog šuma na distribucijskoj elektroenergetskoj mreži, u kontekstu komunikacija tim prijenosnim medijem. Od svih vrsta šuma prisutnih na PLC mediju (engl. Power Line Carrier), impulsni šum predstavlja najveći problem. Pod pojmom impulsnoga šuma razumije se tzv. single-event pulse noise, odnosno šum impulsa koji se pojavljuju u pojedinačnim događajima na mreži, odnosno koji nisu periodičke naravi. Riječ je npr. o impulsima koji nastaju kod uklapanja i isklapanja sklopki, udara munje negdje u relativnoj blizini, itd. U tom smislu, razmatranja u ovome članku odnose se samo na mjesta u mreži koja su dovoljno udaljena od izvora vrlo jakih impulsnih smetnji, poput npr. tiristorskih sklopova. Takve su smetnje periodičke, pa ih se može ukloniti lakše od onih koje to nisu, a čiji ćemo statistički model izložiti u daljnjem tekstu.

Svi rezultati do kojih ćemo doći u ovome članku izvire iz rada prof. Dosterta i drugih njegovih suradnika [1-4]. Mi ćemo samo matematički obraditi rezultate njegovih brojnih eksperimenata, izloženih kroz navedenu literaturu i drugdje. Cilj nam je samo demonstrirati kako se rezultati do kojih je njegova grupa došla mogu pretočiti u jednostavan i zatvoren matematički model, kojega je moguće kontrolirati sa samo nekoliko parametara. On je različit od modela kojega autori predstavljaju npr. u [3]. Tu je mali doprinos, ako se on uopće može tako nazvati, ovoga rada. No, njega ne bi bilo bez izvornih eksperimentalnih rezultata. Dakle, ovdje se koristimo rezultatima istraživanja grupe prof. Dosterta, koje samo prikazujemo u jednom od mogućih oblika, a sve važne znanstvene informacije dolaze iz rada te grupe ljudi.

S obzirom da se predmetna mjerenja redovito odnose na pojedinačne slučajeve (konkretno mjerno mjesto, konfiguraciju mreže, blizinu specifičnih objekata, razmještaj specifičnih trošila, specifične atmosfere prilike itd.), unaprijed se treba odreći općenitosti rezultata izvedenih iz takvih pokusa. Cilj nam je u izvođenju zatvorenih matematičkih izraza koji dovoljno dobro opisuju konkretne mjerne rezultate, iz

čega se može izvesti teza da se općenito pojava impulsnog šuma na PLC mediju odvija prema zakonitostima toga tipa, samo s drugačijim parametrima matematičkih izraza. Naravno, takvu je tezu potrebno provjeriti neovisnim mjerenjima na drugim lokacijama u nekim budućim istraživanjima.

Sada ćemo u najkraćemu opisati mjerni sustav i definicije parametara impulsnog šuma, prema Dostertu (vidjeti npr. [3]). Sama mjerna aparatura iznimno je jednostavna. Naponska mjerna sonda priključena je na niskonaponsku mrežu preko visokopropusnog filtra, kojemu je zadatak ukloniti napon frekvencije 50 Hz, a nakon toga slijedi digitalni memorijski osciloskop. Njime se upravlja automatski, tako da on sukcesivno u vremenu uzima snimke napona na mreži, svaki put u jednom prolazu, i te snimke sprema u memoriju, koja se potom prenosi u bazu podataka na računalu. Tako se dobiva snimka vremenskog tijeka napona, koja ima izvjesnu vremensku rezoluciju. Korištena rezolucija uvijek je rezultat kompromisa između težnje da se pojava promatra u jednom prolazu čim dulje, kako bi se uhvatile i pojave koje se događaju vrlo rijetko, i veličine memorije osciloskopa, kojom je ograničen broj uzoraka u vremenu koji se mogu memorirati u jednom prolazu. Naravno, postoji i ograničenje minimalnog vremenskog razmaka između dva sukcesivna uzorka, a ono je svojstveno svakom pojedinom osciloskopu. S obzirom da snimanja impulsnog šuma u jednom prolazu moraju trajati barem dvadesetak sekundi, u praksi, kod današnjih osciloskopa, to tehnološko ograničenje ne predstavlja problem.

Važno je definirati što je to impuls. Impulsna smetnja nastaje tako što impuls pobuđen od strane nekoga objekta u mreži propagira kroz medij. Kako je distribucijska mreža izgrađena od velikog broja čvorova i grana među njima, ona je karakterizirana velikom disperzijom u vremenu, tj. u njoj se pojavljuje velik broj odjeka (engl. multipath propagation). Zbog toga se impulsne smetnje pojavljuju u „paketima“ izvjesne maksimalne amplitude i trajanja. Na slici 1 vidimo nekoliko takvih paketa, kao i definiciju osnovnih parametara: amplituda paketa, A , je predstavljena većim iznosom

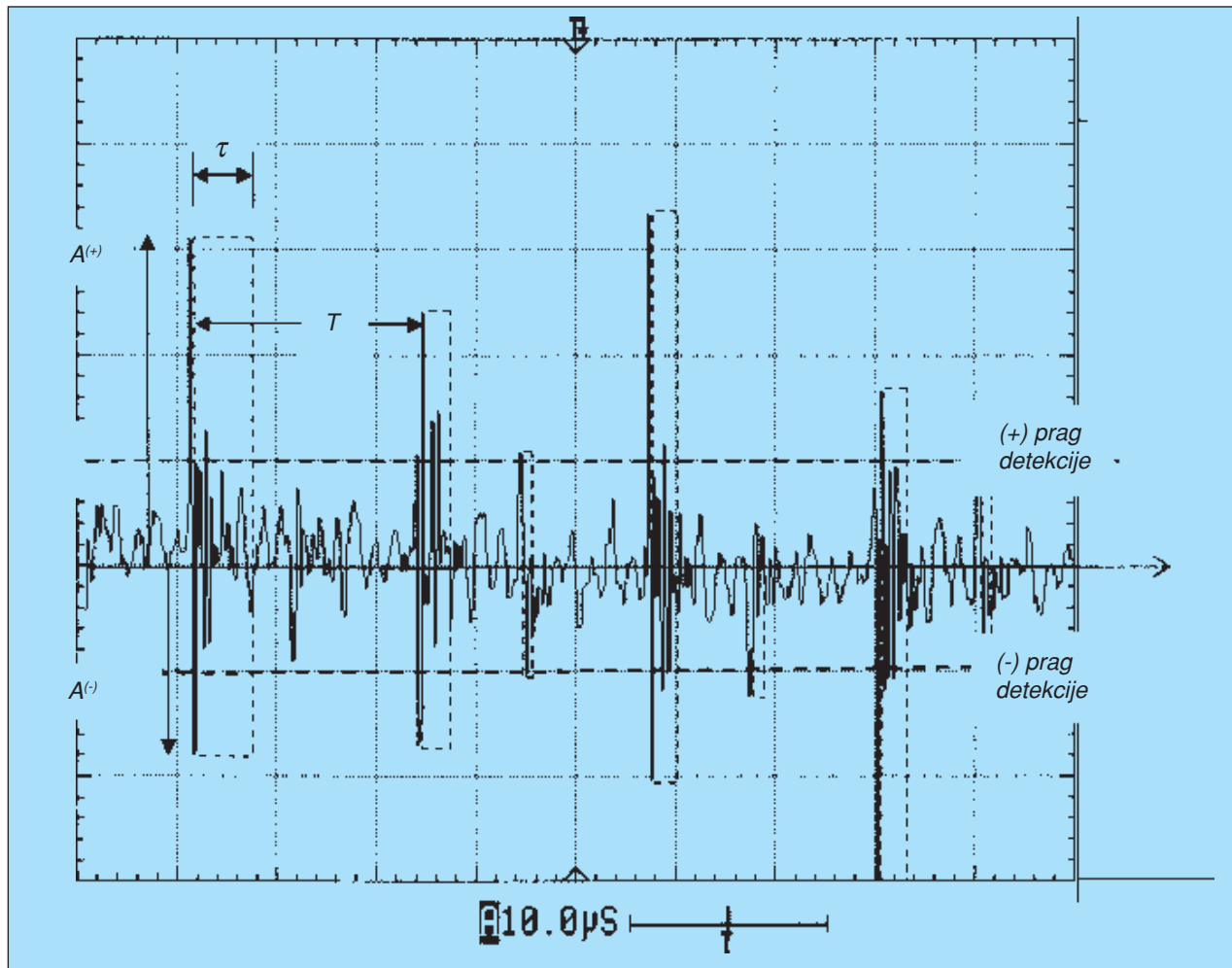
između pozitivne, $A^{(+)}$, i negativne, $A^{(-)}$, najviše dostignute vrijednosti Trajanje paketa, τ , odgovara vremenskom razmaku između trenutka kada pojava prvi put nadvisi prag detekcije, i kada zadnji put padne ispod njega. Razmak između dva paketa, T , odgovara razlici u vremenu početaka dva sukcesivna impulsa. Mi ćemo se ovdje baviti statističkim osobinama upravo tih veličina: amplitude impulsnih paketa, njihova trajanja, i vremenskog razmaka (engl. interarrival time, IAT).

Unutar svakog paketa postoje istitravanja, koja ovise o rezonantnim osobinama same mreže. Često se kod mjerenja primjenjuje vršna ili kvazi-vršna detekcija, kako bi se dobila samo anvelopa promatrane pojave. U tom slučaju, vremenske konstante detektora kreću se u redu veličine od 50 do 100 ms, pa se ne mogu registrirati paketi koji traju kraće od približno toga vremena.

Na kraju, statističkom obradom dobivaju se funkcije razdioba gore navedenih veličina, a najjednostavniji model impulsnog šuma koji se iz njih može izvesti je povorka pravokutnih impulsa s odgovarajućim statističkim parametrima. Oda bere li se složeniji, još realističniji model, unutar impulsnih

razdoblja može se uvesti prigušeno istitravanje na frekvenciji bliskoj rezonantnoj frekvenciji mreže. Naš primjer na slici 1 stvaran je snimak šuma načinjen u poslovnoj zgradi Prijenosnog područja Zagreb. Na njemu vidimo da je prigušenje tranzijenata relativno naglo. Ono se duuguje tipično visokom gušenju instalacijske mreže.

U našem izračunu tretirat ćemo one eksperimentalne rezultate Dosterta i suradnika, koji se odnose na mjerenja pri kojima u blizini nije postojao jak dominantan izvor impulsnih smetnji, tako da su dobivene statističke razdiobe glatke krivulje, koje se mogu aproksimirati jednostavnim formulama. U daljnjem tekstu, pojam "mjerni rezultat", ili sličan, označavat će ograničen skup vrijednosti uzet iz raspoloživih Dostertovih rezultata, a dovoljan za pronalaženje matematičkih ovisnosti. One će se pak tražiti uvijek u oblicima koji su invarijantni u odnosu na promjene mjerila bilo koje koordinatne osi, tako da zapravo apsolutni iznosi promatranih točaka neće biti važni, nego će važni biti njihovi relativni odnosi. Pretpostavlja se da u uvjetima kada u blizini nema dominantnih izvora impulsnih smetnji oblik razdioba ne ovisi o prosječnim vrijednostima stohastičkih varijabli. Naprotiv,



Slika 1. Prikaz stvarne impulsne pojave na instalacijskoj mreži zgrade Prijenosnog područja Zagreb, na kojemu su unesene definicije stohastičkih varijabli amplitude, A , trajanja impulsnih paketa, τ , i meduimpulsnog intervala, T , o kojima je riječ u ovome članku. Za svaki impulsni paket, amplituda A jednaka je većoj između pozitivne i negativne, $A^{(+)}$ i $A^{(-)}$.

Tablica 1. Mjerni uzorak iz kojeg se izvodi vjerojatnost prekoračenja po amplitudi impulsa

$x = \log(1-v)$	- 0.921	- 0.832	- 0.699	- 0.523	- 0.398	- 0.301	- 0.222	- 0.155
$y = \log(A/1V)$	- 0.900	- 1.028	- 1.163	- 1.340	- 1.461	- 1.592	- 1.668	- 1.762

$x = \log(1-v)$	- 0.097	- 0.046	0.000	0.041	0.079	0.114	0.146	0.176	0.204
$y = \log(A/1V)$	- 1.844	- 1.906	- 1.929	- 1.955	- 1.985	- 2.011	- 2.040	- 2.063	- 2.119

kada bi u blizini mjernog mjesta postojao npr. jak periodički izvor impulsnih smetnji, poput tiristorskog prigušivača rasvjete, on bi u konstantnim razmacima od 10 ms stalno uzrokovao impulsne pojave s istim amplitudama i trajanjima, tako da bi sve tri promatrane statističke karakteristike imale velike propade kod odgovarajućih vrijednosti stohastičkih varijabli. Takve slučajeve nije moguće obuhvatiti nikakvim modelom, što znači da se utjecaj jakih bliskih izvora mora promatrati u svakom slučaju posebno. Presentacija mjerenja načinjenih u tim uvjetima nalazi se u [5], a dodatne informacije o šumu u PLC mediju mogu se naći u [6 - 10].

1. RAZDIoba AMPLITUDE IMPULSA

U ovome poglavlju ćemo na osnovi mjerenih podataka izvesti jednostavan zatvoren izraz za funkciju razdiobe amplituda impulsa koji su premašili iznos od 100 mV. Za vrijednosti ispod 100 mV, naravno, ne postoje mjerni rezultati. Matematički izraz izvest će se metodom najmanjih kvadrata (11, 12) na uzorku od 17 točaka u rasponu od 0.12 do 1.6 V. Promatrat će se ovisnost vjerojatnosti prekoračenja, $1 - v$, o amplitudi. Varijabla v je funkcija razdiobe u značenju koje je uobičajeno u stohastičkoj matematici. Vidjet ćemo da je promatrana ovisnost zapravo matematički vrlo jednostavna, a grafički ju je najlakše prikazati, kao i računski obraditi, promatranjem međusobnog odnosa logaritama vjerojatnosti prekoračenja i amplitude.

Zbog praga detekcije nemamo na raspolaganju podatke o razdiobi po amplitudama nižim od 0.1 V. Međutim, svejedno možemo sa sigurnošću ustvrditi da je vjerojatnost prekoračenja amplitude od 0 V jednaka 1, i to će predstavljati asimptotsku vrijednost kojoj izvedena razdioba nužno mora težiti u tom graničnom slučaju. S obzirom da se ova rubna vrijednost elegantno može uklopiti u pronađenu ovisnost za amplitude između 0.1 i 1.6 V, postulirat ćemo upravo takvu ovisnost, imajući u vidu da za amplitude od 0 V do 0.1 V ona ne može biti eksperimentalno potkrijepljena ovakvim mjerenjem. Najveća vrijednost amplitude s kojom ćemo ovdje računati je 1.6 V.

Za razmatranje samo u ovome odjeljku definiramo pomoćne varijable:

$$y = \log(1-v)$$

$$x = \log A.$$

A je amplituda u voltima, a v je razdioba stohastičke varijable A . Dakle, $1-v$ je vjerojatnost prekoračenja amplitude A . Uzorak iz kojega ćemo izračunati funkciju razdiobe dan je u tablici 1. Na slici 2 vidimo da možemo pokušati tražiti linearnu ovisnost apscise i ordinate u obliku:

$$y = ax + b \quad (1)$$

Kvadratna pogreška ovakve procjene načinjena u svim točkama koje ulaze u obradu je:

$$Q = \sum_{i=1}^N (ax_i + b - y_i)^2 \quad (2)$$

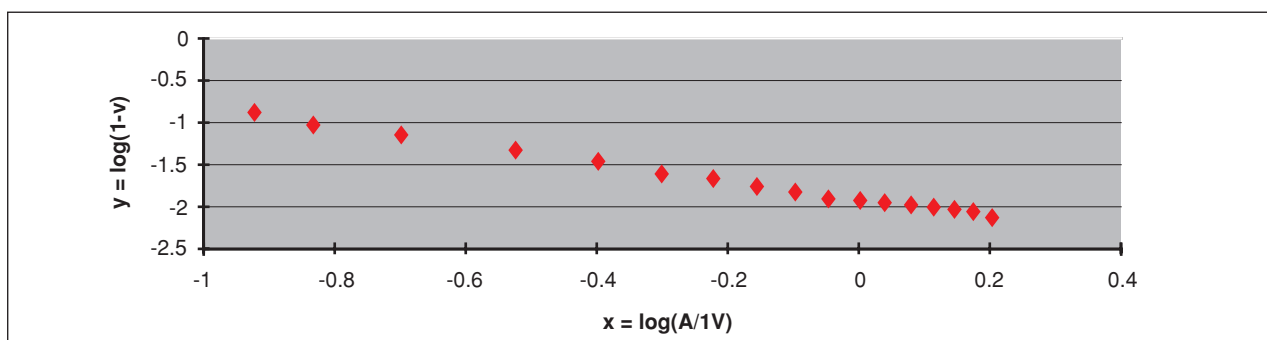
N je ukupni broj točaka. U našem primjeru $N = 17$. Veličina Q poprima minimalnu vrijednost ako parcijalne derivacije po varijablama a i b imaju vrijednost 0. U slučaju kada se metodom najmanjih kvadrata traži linearna funkcija koja najbolje aproksimira zadani set podataka (x_p, y_p) , može se dokazati da je iščezavanje prvih parcijalnih derivacija ujedno i nužan i dovoljan uvjet za postizanje minimuma funkcije Q .

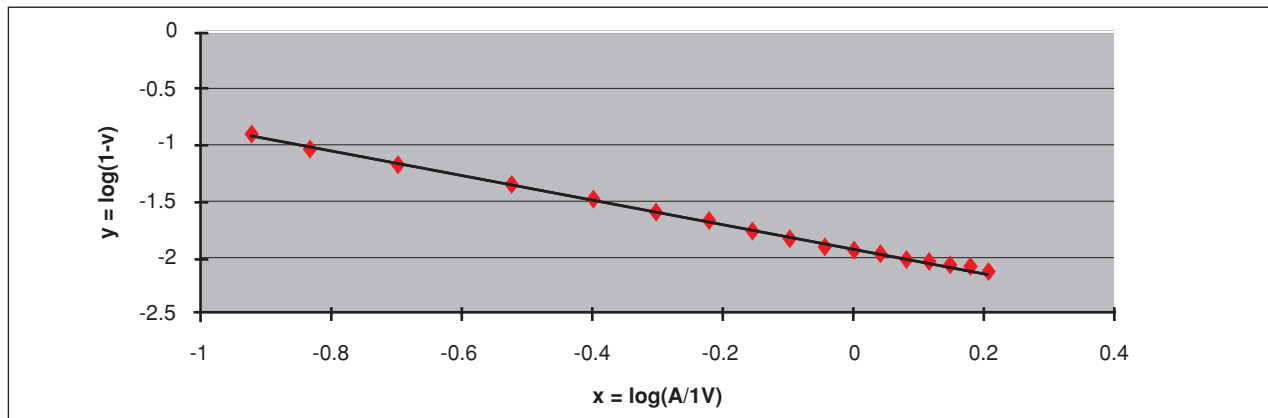
U daljnjem tekstu radi preglednosti nećemo pisati granice sumacije, već ćemo razumijevati da one obuhvaćaju sve parove (x_p, y_p) . Uvjeti koje daje izjednačavanje prvih parcijalnih derivacija s nulom glase: $y = ax + b$. (1)

$$\sum (ax_i + b - y_i) x_i = 0$$

$$\sum (ax_i + b - y_i) = 0 \quad (3)$$

Iz drugog izraza se vidi da će suma apsolutnih pogrešaka biti jednaka nuli, tj. da upravo taj pravac prolazi najbolje između zadanih točaka. Iz (3) slijedi sustav s dvije linearne jednadžbe po varijablama a i b :

**Slika 2. Grafički prikaz podataka iz tablice 1**



Slika 3. Linearna aproksimacija mjerenih podataka navedenih u tablici 1 dobivena metodom najmanjih kvadrata. Puna linija predstavlja izračunati pravac, a točkama su prikazani mjereni podaci.

$$\begin{bmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{bmatrix} \quad (4)$$

Uvrštavanjem podataka navedenih u tablici 1 u sustav jednačbi (4), dobivamo sljedeće vrijednosti za a i b :

$$\begin{aligned} a &= -1.06929993866 \\ b &= -1.90758682296. \end{aligned}$$

Slika 3 prikazuje dobiveni pravac zajedno s točkama iz kojih je on izveden.

Prema tomu, povratkom iz pomoćnih varijabli u stvarne, za zadani raspon vrijednosti amplituda možemo napisati približan izraz za vjerojatnost prekoračenja:

$$1 - v \approx 10^{(-1.0693 \log A - 1.9076)} \quad (5)$$

Iz vrijednosti a koja je vrlo bliska jedinici zaključujemo da vjerojatnost prekoračenja amplitude single-event impulsa u promatranom rasponu vrijednosti pada tako da se logaritam vjerojatnosti prekoračenja smanji za oko 1 dok se amplituda poveća 10 puta. Obratno, amplituda koja odgovara određenoj vrijednosti vjerojatnosti prekoračenja pada za 20 dB po dekadi promjene te vjerojatnosti.

Formula (5) očigledno ne može biti zadovoljena za vrlo male vrijednosti amplitude A , dočim za velike vrijednosti nema fundamentalnih razloga zbog kojih (5) ne bi mogao biti istinit izraz. Konkretno, za $A = 0$ mora nužno biti $1 - v = 1$, odnosno $v = 0$. To znači da se pravac prikazan na slici 2, idući na lijevo, asimptotski savija prema horizontalnom pravcu $y = 0$. Takva krivulja, naravno samo formalno, ima isti oblik kao i npr. amplitudno-frekvencijska ovisnost niskopropusnog filtra prvoga reda:

$$y = -\frac{1}{2} \beta \cdot \log(1 + a^2 10^{2x}). \quad (6)$$

S obzirom da za velike amplitude, tj. za velike vrijednosti x , mora vrijediti $y = ax + b$, te s obzirom da za velike vrijednosti x jednačba (6) prelazi u $y \approx -\beta \cdot \log a - \beta x$, slijede vrijednosti za α i β :

$$\begin{aligned} \alpha &\approx 10^{b/a} \approx 48.8078, \\ \beta &\approx -a \approx 1.0693. \end{aligned} \quad (7)$$

Kada bi vrijedio ovakav model, vjerojatnost prekoračenja bila bi definirana sa

$$1 - v = \frac{1}{\sqrt{(1 + \alpha^2 A^2)^\beta}} \quad (8)$$

i iznosima parametara navedenim u (7). Premda mjerenje s pragom registracije impulsa postavljenim na 100 mV ne može potvrditi ovakvu zavisnost, njeno točno poznavanje u praksi nema osobito velikog značenja, jer se toliko slabi impulsi utapaju u pozadinskom šumu i zapravo ne utječu na komunikacijski proces karakterističan za single-event impulse. Što se tiče jakih impulsa, s amplitudama iznad 2 V, već je rečeno da je njihova pojava vrlo rijetka, što se uostalom i vidi iz mjernih podataka. Nadalje, prijammnici mogu imati ugrađen jednostavan sklop za potiskivanje naponskih vrhova.

Stoga zaključujemo da model razdiobe amplitude impulsnoga šuma prema (8), odnosno prema (1), u potpunosti udovoljava potrebama simulacije komunikacijskog procesa. Amplitudna razdioba impulsnog šuma vanjske mreže može se, dakle, modelirati dvama parametrima, a i b , odnosno α i β .

Kod instalacijske mreže situacija je utoliko kompliciranija što se u blizini mjernog mjesta može nalaziti neko trošilo s iznimno impulsnim svojstvima uzimanja energije iz distribucijske mreže, tako da uslijed suviše malog prigušenja može ozbiljno narasti udio impulsa izrazito velikih amplituda. Naravno, takve pojedinačne slučajeve nije moguće obuhvatiti jedinstvenim modelom, pa ih je potrebno uzeti u obzir na drugi način.

2. RAZDIOBA VREMENA TRAJANJA IMPULSA

U ovome ćemo odjeljku iz mjerenih podataka izvesti model statističke razdiobe trajanja pojedinačnih impulsa koji čine impulsni šum PLC medija, i to u obliku jednostavnog matematičkog izraza koji povezuje vjerojatnost prekoračenja $1 - v$ i trajanje impulsa τ , izraženo u milisekundama. Kao i u slučaju razdiobe po amplitudama, ovdje je također jednostavnije promatrati odnos između logaritama tih veličina, pa ćemo samo za potrebe razmatranja u ovome poglavlju uvesti pomoćne varijable:

Tablica 2. Mjerni uzorak iz kojega se izvodi vjerojatnost prekoračenja po trajanju impulsa

$x = \log(\tau/1\text{ms})$	-1.150	-1.000	-0.150	0.214	0.398	0.544	0.699	0.778	0.875	0.903
$y = \log(1-v)$	-1.078	-1.270	-2.000	-2.580	-3.421	-3.665	-4.149	-4.420	-4.503	-5.000

$$y = \log(1-v)$$

$$x = \log \tau$$

Mjerni uzorak na temelju kojega ćemo izvesti matematički model dan je u tablici 2, a ilustriran je na slici 4.

Najmanja vrijednost varijable x unutar prezentiranog skupa točaka odgovara trajanju τ od 0.05 ms. Veće vrijednosti od 12 ms nisu uzimane u razmatranje jer je njihova pojava toliko rijetka (vjerojatnost prekoračenja zalazi u područje vrijednosti 10^{-5} i manje), da bi za dobivanje vjerodostojnih rezultata bilo potrebno vršiti mnogo dugotrajnija mjerenja od ovih.

Premda se na prvi pogled čini da je za nadomještanje ovoga seta točaka potrebno pronaći složeniju krivulju od pravca, lako je pokazati da se izuzetno dobra aproksimacija postiže pomoću samo dva pravca, odnosno lomljenom linijom. Da bi se metodom najmanjih kvadrata dobila optimalna aproksimacija lomljenom crtom, potrebno je načiniti jednostavnu računarsku rutinu koja će od deset zadanih točaka odabirati jednu po jednu, osim krajnjih. Odabrana točka sa svima ostalima lijevo od sebe dat će metodom najmanjih kvadrata jedan pravac, dok će ista ta točka sa svima ostalima desno od sebe metodom najmanjih kvadrata dati drugi pravac. Svaka pojedina točka tada će biti aproksimirana jednim ili drugim pravcem, ovisno nalazi li se njena vrijednost apscise lijevo ili desno od sjecišta dvaju dobivenih pravaca. Na taj način dobiva se osam parova pravaca. Za svaki par potrebno je izračunati ukupnu kvadratnu pogrešku, te odabrati onaj par koji daje najmanju vrijednost. Taj par pravaca prikazan je zajedno s mjerenim podacima na slici 5. Lijevi pravac generiran je metodom najmanjih kvadrata iz prve četiri točke, a desni iz posljednjih sedam. Dakle, četvrta točka je dala najbolju lomljenu aproksimaciju, i upravo u njevoj blizini nalazi se i koljeno dobivene ovisnosti.

Trendovi koje pokazuju dobiveni pravci sami po sebi su vrlo zanimljivi. Lijevi pravac ima jednadžbu:

$$y = ax + b$$

$$a = -1.04000700793$$

$$b = -2.27448218647.$$

(9)

Desni pak pravac ima slijedeću jednadžbu:

$$y = cx + d$$

$$c = -3.09124482023$$

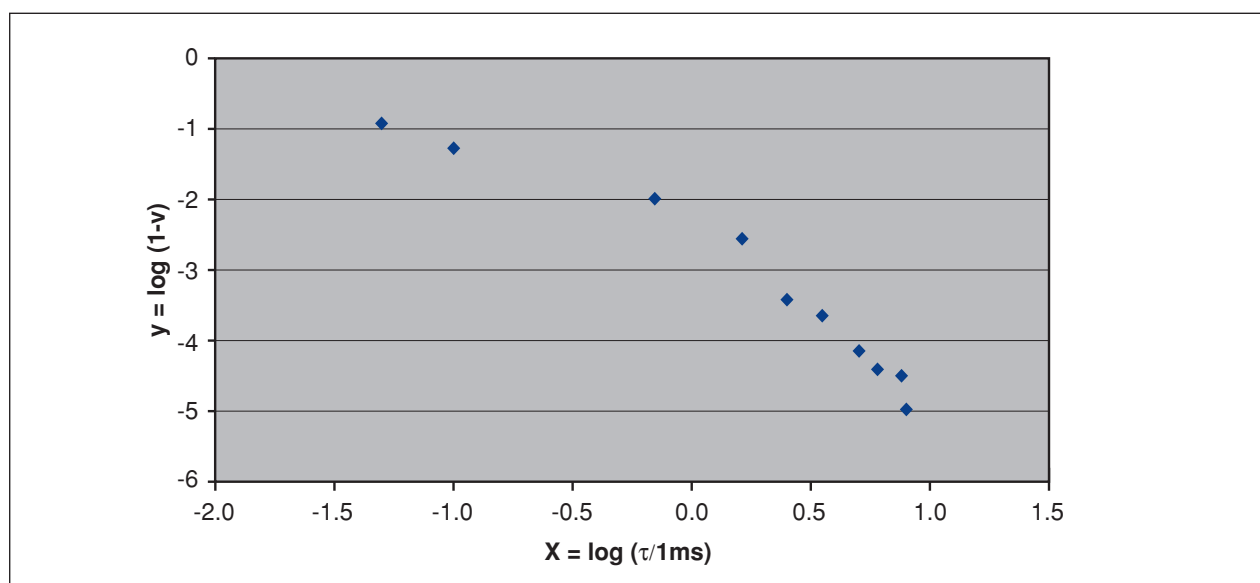
$$d = -2.01464558542.$$

(10)

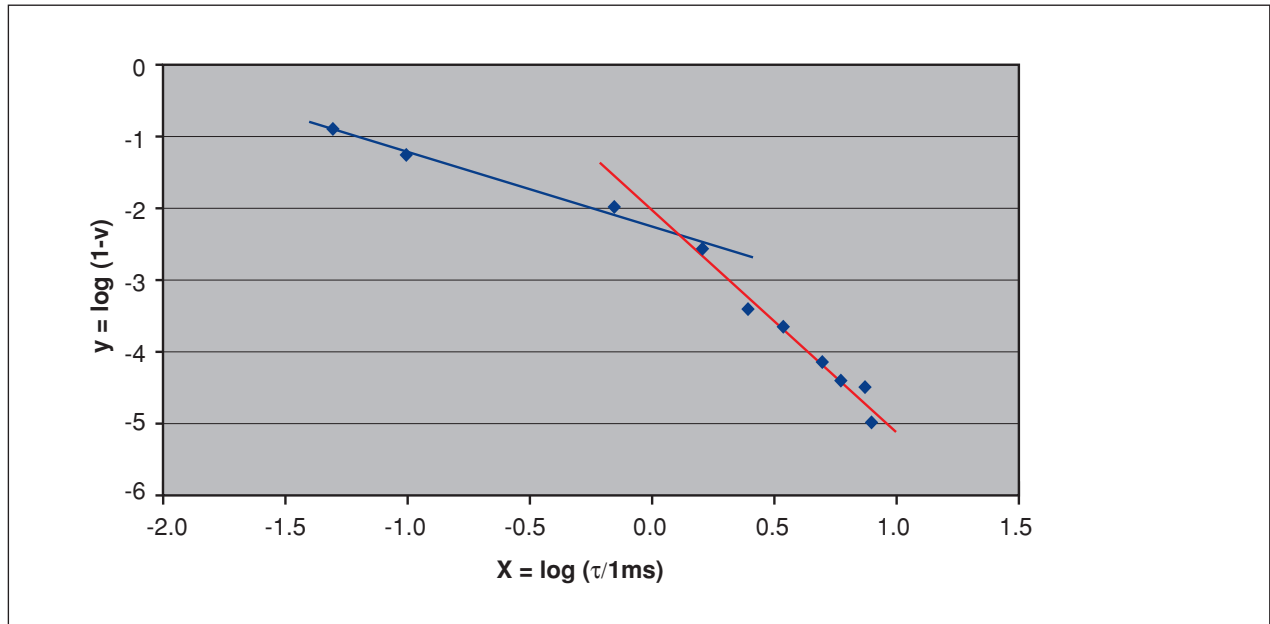
Sjecište tih dvaju pravaca ima koordinate $(x_0, y_0) = (0.126673074907, -2.40622307209)$. To odgovara trajanju impulsa τ_0 od oko 1.3 ms, odnosno vjerojatnosti prekoračenja $1-v_0$ od oko 0.4 %.

Dakle, sudeći prema iznosima brojeva a i c , promatramo li sustav kojemu je trajanje impulsa τ ulazna, a vjerojatnost prekoračenja $1-v$ izlazna varijabla, tada se on za vrijednosti τ manje od neke granične, τ_0 , ponaša praktički točno kao sustav 1. reda, a za veće kao sustav 3. reda, s karakteristikom niskog propusta. Lom karakteristike kod τ_0 teško je točno objasniti. Može se sa sigurnošću pretpostaviti da upotrijebljeni visokopropusni mrežni filter doprinio smanjenju udjela dugotrajnih impulsa u ukupnom broju registriranih fluktuacija napona, a taj efekt se očituje već od oko 1 ms nadalje. Prema ovome se može zauzeti i stav da niti inače PLC sustave nije moguće koristiti bez dobrog mrežnog filtera, tako da je možda i korisnije imati model koji uključuje postojanje filtera, umjesto onoga koji bi karakterizirao golu PLC mrežu.

Bitno je opaziti da se preko 99.5 % impulsa, koji su kraći od 1.3 ms, pokorava vjerojatnosti prekoračenja 1. reda, prema (9). Ipak, u modelu šuma mora se svakako zadržati i ovisnost 3. reda za dugotrajnije impulse, jer bi njihova uloga u protivnom bila precijenjena.



Slika 4. Grafički prikaz mjernog uzorka iz kojega se izvodi vjerojatnost prekoračenja po trajanju impulsa



Slika 5. Aproximacija mjerenih podataka optimalnim parom pravaca

Istini za volju, razdioba impulsa koji traju dulje od jedne periode napona energetske mreže, dakle od 20-ak ms, uopće nije važna, jer se pojava takvih i duljih impulsa može očekivati najviše jednom u pet dana, odnosno još rjeđe, tako da oni nisu relevantni niti za simulacije PLC komunikacijskih sustava, a niti za njihove stvarne primjene.

Što se tiče razdiobe za impulse kraće od osnovnog vremenskog kvanta, 50 μs, moguće je jedino na osnovi opažene ovisnosti vjerojatnosti prekoračenja o trajanju impulsa duljih od njega postulirati takvu vjerojatnost prekoračenja, koja će za veće vrijednosti τ težiti ka (9), te koja će za τ → 0 dati: 1 - v → 1. Zbog formalne sličnosti postupit ćemo po uzoru na (6), (7) i (8), tj. iz podataka a i b, danih u (9) izračunat ćemo α i β:

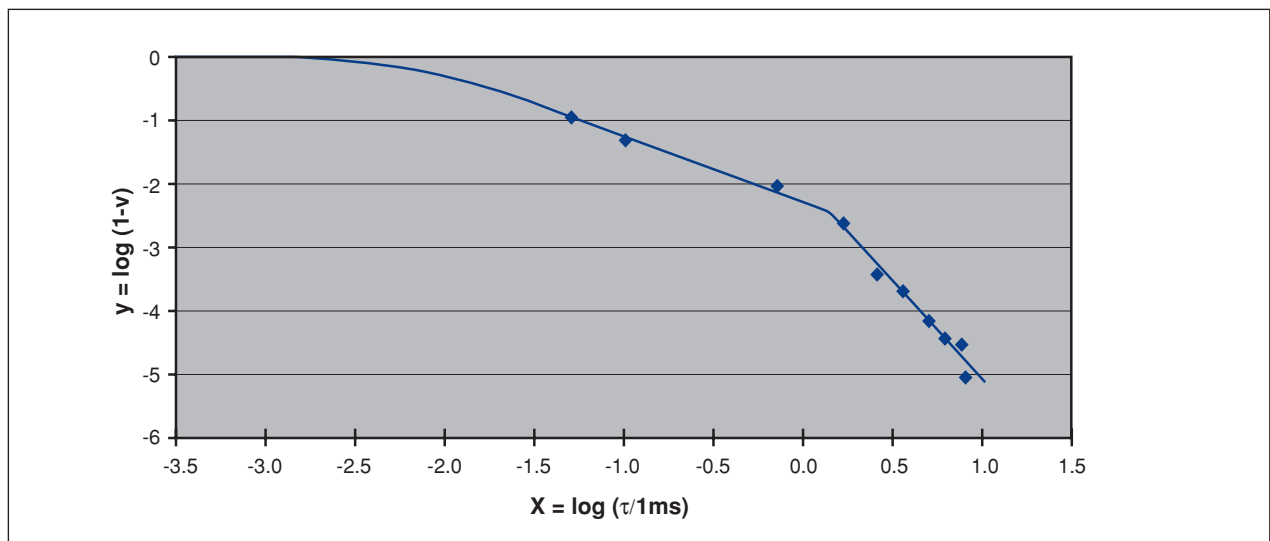
$$\begin{aligned} \alpha &= 10^{b/a} = 153.810989326 \\ \beta &= -a = 1.04000700793. \end{aligned} \tag{11}$$

Tako ćemo dobiti zatvoren izraz za vjerojatnost prekoračenja po vremenu trajanja impulsa u obliku neprekidne funkcije lomljene u jednoj točki, τ₀:

$$1 - v = \begin{cases} 1 & \text{za } \tau \leq \tau_0 \\ \frac{1}{\sqrt{(1 + \alpha^2 \tau^2)^\beta}} & \text{za } \tau > \tau_0 \\ 10^{c \log \tau + d} & \text{za } \tau > \tau_0 \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \alpha &\approx 153.8110 \\ \beta &\approx 1.0400 \\ c &\approx -3.0912 \\ d &\approx -2.0146 \end{aligned}$$

Na slici 6 prikazan je ovaj model razdiobe trajanja impulsa u log-log mjerilu, zajedno s izmjerenim podacima.



Slika 6. Model razdiobe trajanja impulsa prema (12). Puna linija predstavlja računski model, a točke predstavljaju izmjerene vrijednosti.

3. VJEROJATNOST PREKORAČENJA TRAJANJA INTERIMPULSNIH INTERVALA KOJI SU KRAĆI OD 20 MS

U nastavku ćemo analizirati statističku razdiobu trajanja bezimpulsnog intervala, odnosno vremenskog razmaka između registriranih početaka susjednih impulsa. Postoje dva područja koja se ponaosob mogu prilično precizno prikazati jednostavnim analitičkim izrazima, tako da će ukupna funkcija razdiobe biti predstavljena unijom dviju dobivenih ovisnosti, slično kao što je model razdiobe trajanja impulsa prikazan unijom dva jednostavna izraza, kao u (12), odnosno na slici 6. Unatoč tome što je razdiobu bezimpulsnih intervala moguće dobro opisati jednom jednostavnom relacijom između logaritama veličina $1-v$ i T [s], najprije ćemo načiniti poseban model za manje vrijednosti T , ispod 20 ms, i to promatranjem ovisnosti $\log(1-v)$ o vrijednosti T , dakle ne o njenom logaritmu, jer takav model omogućuje precizniju karakterizaciju razdiobe pri malim vrijednostima T od one koju daje sveobuhvatni izraz, izveden u sljedećem poglavlju.

U našoj obradi podijelit ćemo čitav set mjerenih podataka na dva dijela, od kojih prvi, tretiran u ovome poglavlju, završava na vrijednosti međupulsnog razmaka od 20 ms, i prema tomu opisuje statističku razdiobu doista najkraćih intervala. Granica od 20 ms određena je više-manje proizvoljno. Ona je mogla biti na nešto manjoj ili nešto većoj vrijednosti. Najmanji mjerni podatak iz seta pomoću kojega se došlo do izraza za razdiobu iznosi 0.4 ms.

Razmatranjem strukture mjernih podataka može se zaključiti da je najpogodnije promatrati ovisnost logaritma vjerojatnosti prekoračenja, $\log(1-v)$, o iznosu interimpulsnog intervala izraženome u milisekundama, T . Uzorak mjerenja dan je u tabeli 3, odnosno na slici 7.

U ovome poglavlju definirat ćemo zbog lakšega pisanja pomoćne varijable X i Y , sa sljedećim značenjima:

$$\begin{aligned} X &= \log(1-v) \\ Y &= T [mx] \end{aligned} \quad (13)$$

Treba obratiti pažnju da su varijable X i Y okrenute obratno u odnosu na uobičajen poredak prema koordinatnim osima, kao što se vidi na prethodnoj slici. To je učinjeno samo zbog toga što ćemo tražiti ovisnost vremena T o logaritmu vrijednosti $(1-v)$, i nema načelnog značenja.

Obradom konkretnih mjernih podataka uočene su sljedeće osobine grafa:

- blag porast vrijednosti Y u početnom dijelu negativne osi X
- vrlo strm porast nakon koljena
- vrlo oštro koljeno karakteristike.

Funkcija koja može dobro opisati ovakvu krivulju $Y = F(X)$ ima oblik:

$$Y = a \left(10^{b|X|} - 1 \right). \quad (14)$$

To je ista eksponencijalna funkcija koja opisuje primjerice statičku $i-v$ karakteristiku poluvodičke diode. Ispitane su i druge vrste funkcija, kojima je zajednička nemogućnost istodobne dobre reprodukcije podataka u svakom od tri karakteristična područja definicije varijable X . Navedena funkcija automatski zadovoljava i vrlo važan rubni uvjet, da je $\log(1-v) = 0$ za $T = 0$. Također je bitno da je funkcija monotona za bilo koji odabir vrijednosti a i b .

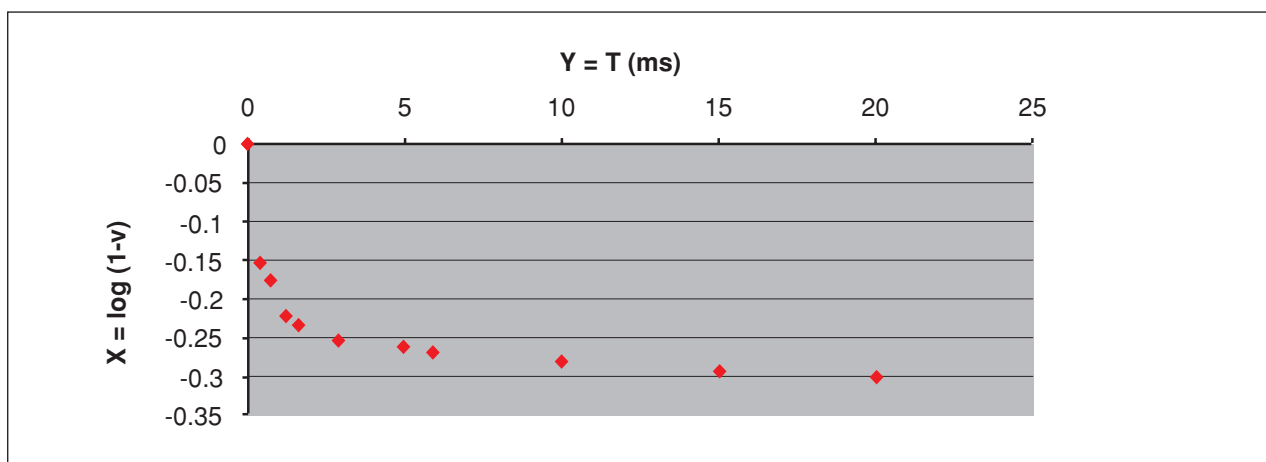
Koeficijenti a i b odredit će se metodom najmanjih kvadrata iz mjerenih podataka. U sljedećim razmatranjima zbog kraćeg pisanja izostavit ćemo znak apsolutne vrijednosti, koji se podrazumijeva. Prema (14), funkcija sume kvadratnih odstupanja u svih N promatranih točaka jednaka je:

$$Q = \sum_{i=1}^N \left[a \left(10^{bx_i} - 1 \right) - Y_i \right]^2. \quad (15)$$

U našem primjeru $N = 10$, a u sljedećim formulama zbog preglednosti nećemo upisivati granice sumacije. Nužni uvjeti za minimiziranje ukupne kvadratne pogreške Q glase:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial a} &= 2 \cdot \sum \left[a \left(10^{bx_i} - 1 \right) - Y_i \right] \cdot \left(10^{bx_i} - 1 \right) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial a} &= 2 \cdot \sum \left[a \left(10^{bx_i} - 1 \right) - Y_i \right] \cdot a \cdot 10^{bx_i} \cdot X_i = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Može se pokazati da su ovi uvjeti ujedno i dovoljni. Iz njih se, međutim, očigledno ne može dobiti linearni sustav jednadžbi s nepoznicama a i b . Svejedno, rješenje ovoga sustava jednadžbi može se dobiti numeričkim postupkom. Iz jednadžbi (16) direktno slijede dvije jednadžbe za varijablu a :



Slika 7. Mjerni uzorak za određivanje razdiobe međupulsnih intervala kraćih od 20 ms

$$a_1 = \frac{\sum Y_i \cdot (10^{bx_i} - 1)}{\sum (10^{bx_i} - 1)^2}$$

$$a_1 = \frac{\sum X_i Y_i \cdot 10^{bx_i}}{\sum X_i \cdot 10^{bx_i} \cdot (10^{bx_i} - 1)} \quad (17)$$

Ova dva izraza moraju dati identičan rezultat, a to se događa samo kod jedne određene vrijednosti varijable b , osim trivijalnog rješenja, kod kojega b iznosi 0. Stoga program koji provodi ovaj izračun mora kontrolirati vrijednost:

$$\varepsilon = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \quad (18)$$

Kada ona postane jednaka nuli, tj. kada je $a_1 = a_2$, konstatira se da je pronađen par rješenja (a, b) . Zanimljivo je da je upotrijebljeni program, računavši s ukupno dvanaest decimalnih mjesta, pronašao takav par vrijednosti a i b koji prema (18) daje *točno* nulu, što znači da su pronađene vrijednosti nepouzdanе tek u decimalnoj znamenki najmanje težine. Praktično, program kreće od neke vrijednosti b približne pravom rješenju, te pronalazi dvije vrlo bliske vrijednosti b za koje je vrijednost ε bliska nuli. Optimalna vrijednost b pronalazi se jednostavnom linearnom interpolacijom kroz te dvije točke. To dobro funkcionira zato što je ovisnost (o b izrazito linearna u bliskoj okolini optimalnog rješenja. Za naš zadani set izmjerenih vrijednosti pronađeno je slijedeće rješenje sustava jednadžbi (16):

$$(a, b) = (2.46548920145 \cdot 10^4, 16.2903978739).$$

Pitanje je kako se može doći do približne procjene vrijednosti b , koja će poslužiti kao startna vrijednost za točan izra-

čun. Da bismo to učinili, pojednostavit ćemo izraz (14) tako što ćemo zanemariti suptrahend 1 u zagradi, što može dobro funkcionirati za točke nakon koljena karakteristike, ali ni pogreška koja će biti zamjetna za točke prije koljena nije ovdje od esencijalne važnosti. Uz takvo zanemarenje, odaberimo bilo koje dvije točke iz zadanoga seta, i označimo ih indeksima k i l . Tada vrijedi približno:

$$Y_k = a \cdot 10^{bx_k} \Rightarrow \frac{Y_k}{Y_l} \approx 10^{b(x_k - x_l)}$$

$$\Rightarrow b_{k,l} \approx \frac{\log Y_k - \log Y_l}{X_k - X_l} \quad (19)$$

Kombiniranjem toga s bilo kojom od polaznih približnih jednakosti dobijamo procjenu za a :

$$a_{k,l} \approx Y_k \left(\frac{Y_l}{Y_k} \right)^{\frac{x_k}{x_k - x_l}} \quad (20)$$

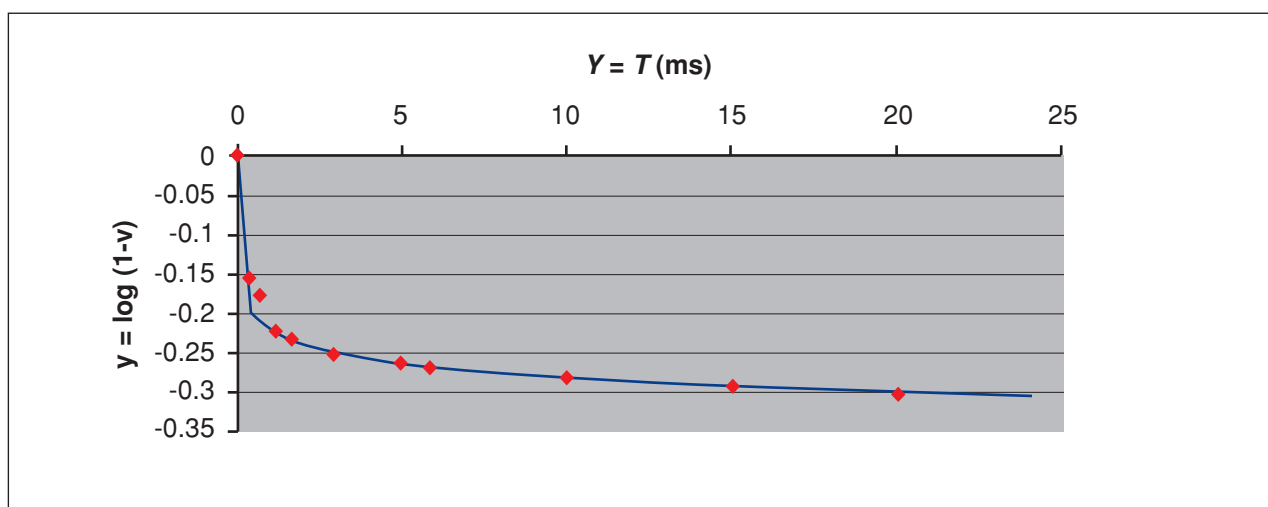
Ako je N broj svih točaka s poznatim podacima (X_p, Y_p) , osim trivijalne $(0, 0)$, a takvih je kod nas 10, ukupan broj svih mogućih parova (k, l) , $k \neq l$, bez ponavljanja iznosi $M = N(N-1)/2 = 45$. Početnu procjenu za b možemo tražiti aritmetičkom, odnosno geometrijskom sredinom svih 45 dobivenih vrijednosti, tj:

$$\tilde{b} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{\log Y_k - \log Y_l}{X_k - X_l}$$

$$\hat{b} = \sqrt[M]{\prod_{i=1}^M \frac{\log Y_k - \log Y_l}{X_k - X_l}} \quad (21)$$

Tablica 3. Mjerni uzorak za određivanje razdiobe međuimpulsnih intervala kraćih od 20 ms

T (ms)	0.40	0.70	1.20	1.65	2.95	5.00	5.89	10.0	15.0	20.0
log (1-v)	-0.1544	-0.1770	-0.2222	-0.2340	-0.2539	-0.2630	-0.2689	-0.2823	-0.2945	-0.3010



Slika 8. Krivulja ovisnosti varijable Y o varijabli X izračunata metodom najmanjih kvadrata iz seta izmjerenih vrijednosti, koje su prikazane točkama

U oba slučaja dobivaju se nešto podcijenjene vrijednosti, redom cca. 13.66 i 13.89, ali one predstavljaju dobru početnu procjenu utemeljenu na stvarnom rasporedu test točaka. Ukratko, set točaka iz tablice 3 može se prikazati sljedećom ovisnošću optimiziranom metodom najmanjih kvadrata:

$$Y = 2.46548920145 \cdot (10^{16.2903978739} - 1). \quad (22)$$

S obzirom da je kod nas $|X| = -X$ u cijeloj interesantnoj domeni, povratnom supstitucijom možemo (22) zapisati u ekvivalentnim oblicima:

$$T = a \left[\frac{1}{(1-v)^b} - 1 \right] [ms]. \quad (23)$$

odnosno:

$$1-v = \left(\frac{1}{1 + \frac{T/ms}{a}} \right)^{\frac{1}{b}}. \quad (24)$$

Na slici 8 vidi se krivulja prema (22) unešena u grafikon zajedno s izmjerenim podacima.

4. GENERALIZIRANA VJEROJATNOST PREKORAČENJA TRAJANJA MEĐUMPULSNIH INTERVALA

U ovome poglavlju odredit ćemo zakonitost vjerojatnosti prekoračenja trajanja bezimpulsnih intervala koja obuhvaća sve mjerne podatke, kako one izlistane u tablici 3, tako i one za vremena veća od 20 ms, koje dajemo u tablici 4. Najprije ćemo naći matematički oblik međuovisnosti logaritama veličina $1-v$ i T [s] samo za vremena dulja od 20 ms, a nakon toga ćemo jednostavno proširiti taj model na sve mjerene vrijednosti. Samo za potrebe sažetijega pisanja u ovom odjeljku definirat ćemo pomoćne varijable:

$$\begin{aligned} X &= \log(1-v) \\ Y &= \log\left(\frac{T}{1s}\right). \end{aligned} \quad (25)$$

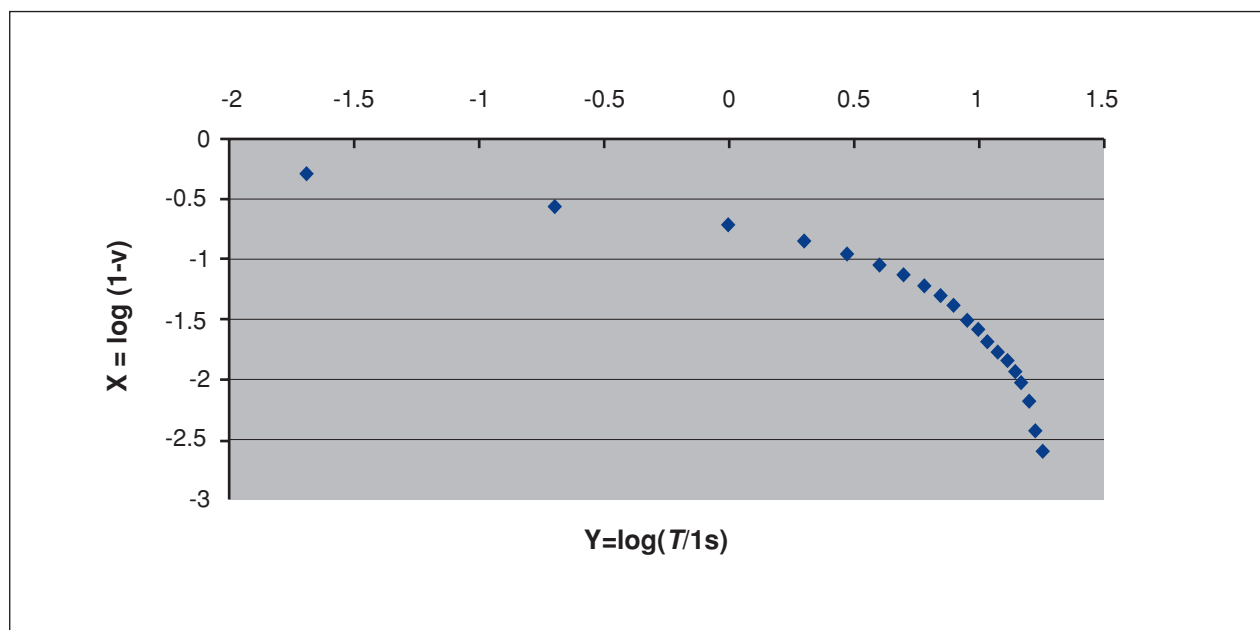
Tražit ćemo izraz za ovisnost $Y = F(X)$. Ulazni podaci za ovaj račun dani su također i na slici 9.

Ispitivanjem različitih funkcija koje bi mogle dobro reprezentirati ovakav oblik grafa, ustanovljujemo da funkcija sljedećeg oblika može vrlo dobro prikazati traženu ovisnost:

$$Y = \frac{a}{|X|^b} + c. \quad (26)$$

Tablica 4. Mjereni podaci za određivanje razdiobe interimpulsnih intervala duljih od 20 ms

X	-0.301	-0.556	-0.716	-0.852	-0.958	-1.050	-1.130	-1.227	-1.313	-1.390
Y	-1.699	-0.699	0.000	0.301	0.477	0.602	0.699	0.778	0.854	0.903
X	-1.501	-1.590	-1.684	-1.775	-1.862	-1.924	-2.046	-2.183	-2.438	-2.597
Y	0.954	1.000	1.041	1.079	1.114	1.146	1.176	1.204	1.230	1.255



Slika 9. Mjereni podaci za određivanje razdiobe interimpulsnih intervala duljih od 20 ms

Važno je pripomenuti da funkcija oblika $Y = a \log |X| + b$, koja bi se na prvi pogled, prema izgledu grafikona, mogla nametnuti kao opcija izbora, uopće ne može reproducirati koljeno karakteristike. Kao i u prošlom poglavlju, i ovdje ćemo zbog preglednosti i kratkoće pisanja u sljedećim formulama ispustiti znak apsolutne vrijednosti, sve dok ne bude bilo potrebno uvažiti njegovo postojanje, pa će nam X u stvari značiti $|X|$, a u izvodu metodom najmanjih kvadrata koristit ćemo apsolutne vrijednosti iznosa varijable X danih u gornjoj tabeli.

Želimo li set mjerenih podataka nadomjestiti funkcijom prema (26), kvadratna pogriješka evaluirana u N izmjerenih točaka će iznositi:

$$Q = \sum_{i=1}^N \left[\frac{a}{X_i^b} + c - Y_i \right]^2. \quad (27)$$

Kod nas je $N = 20$, pa ćemo nadalje izostavljati pisanje uvijek istih granica sumacije.

Nužni i dovoljni uvjeti za minimiziranje ove funkcije dobivaju se izjednačavanjem svih prvih parcijalnih derivacija po nepoznatim parametrima s nulom:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial a} &= 2 \sum \left[\frac{a}{X_i^b} + c - Y_i \right] \cdot \frac{1}{X_i^b} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial a} &= 2 \sum \left[\frac{a}{X_i^b} + c - Y_i \right] \cdot \frac{-a \cdot \ln X_i}{X_i^b} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial a} &= 2 \sum \left[\frac{a}{X_i^b} + c - Y_i \right] = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

To daje sustav od tri jednadžbe:

$$\begin{aligned} \sum \left(\frac{a}{X_i^{2b}} + \frac{c}{X_i^b} \right) &= \sum \frac{Y_i}{X_i^b} \\ \sum \left(\frac{a}{X_i^b} + c \right) \cdot \frac{\ln X_i}{X_i^b} &= \sum \frac{Y_i \ln X_i}{X_i^b} \\ \sum \left(\frac{a}{X_i^b} + c \right) &= \sum Y_i \end{aligned} \quad (29)$$

To je sustav od tri nelinearne jednadžbe, pa kao takav nije jednostavan za rješavanje, s obzirom na eksponencijalnu ovisnost o jednoj od varijabli, naime b . Ipak, uporabom relativno jednostavnog računalnog programa on se može riješiti vrlo precizno.

Definirajmo sljedeće pomoćne varijable:

$$\begin{aligned} A &= \sum (1/X_i^{2b}) & B &= \sum (1/X_i^b) \\ C &= \sum (Y_i / X_i^b) & D &= \sum Y_i \\ E &= \sum (\ln X_i / X_i^{2b}) & F &= \sum (\ln X_i / X_i^b) \\ G &= \sum (Y_i \ln X_i / X_i^b) & N &= 20. \end{aligned}$$

Promatrajmo dva sustava linearnih jednadžbi za a i c u kojima ćemo varijablu b , sadržanu u gornjim supstitucijama, držati kao parametar:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & B \\ B & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} E & F \\ B & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} G \\ D \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

To su sustavi složeni od prve i treće, odnosno od druge i treće jednadžbe iz (29). Svaki od njih ima rješenje koje ovisi o parametru b . Tako prvi sustav prema Kramerovom pravilu daje:

$$a_1 = \frac{CN - DB}{AN - B^2}; c_1 = \frac{AD - BC}{AN - B^2}. \quad (31)$$

Iz drugoga pak slijede rješenja:

$$a_2 = \frac{CN - DB}{AN - B^2}; c_2 = \frac{AD - BC}{AN - B^2}. \quad (32)$$

Program treba pratiti sljedeću vrijednost:

$$\varepsilon = \left| \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right| + \left| \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \right|. \quad (33)$$

Ona iščezava pri onoj vrijednosti b pri kojoj oba sustava daju identična rješenja za a i c . Time se postiže jedinstveno rješenje (a, b, c) . Korišteni program uspio je pronaći vrijednosti a , b i c s ukupno 11 sigurnih decimalnih mjesta, pri čemu je vrijednost ε svedena u najboljem slučaju na 1.48×10^{-11} . Rješenje sustava je:

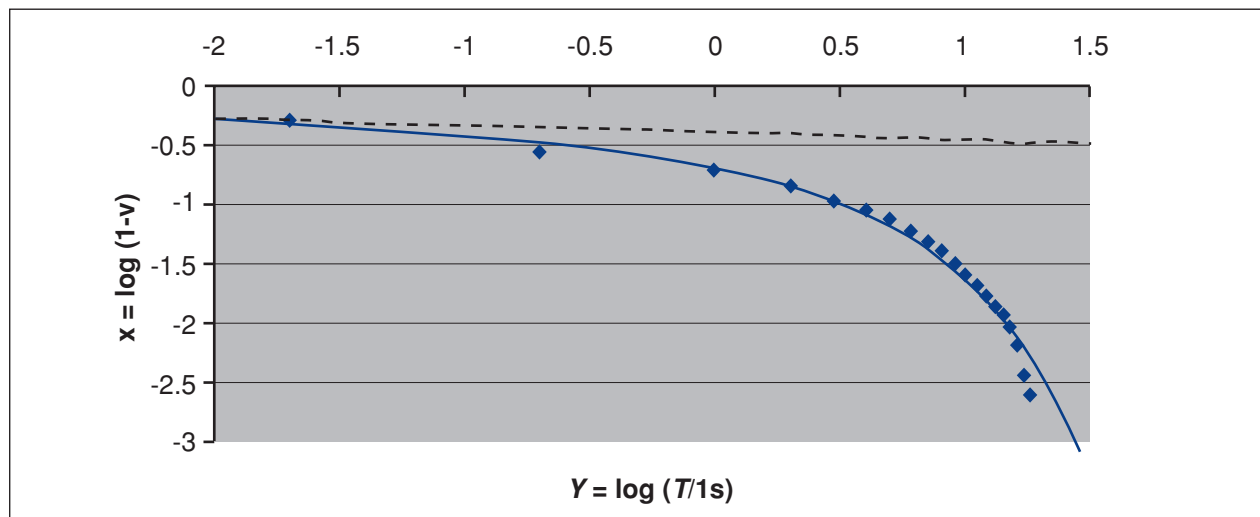
$$\begin{aligned} a &= -1.8239953290 \\ b &= 0.6741847595 \\ c &= 2.3099480631. \end{aligned}$$

Povratkom iz supstitucije, i uvažavanjem činjenice da smo kroz cijeli izvod ispuštali znak apsolutne vrijednosti iz (26), te da je u cijelom području definicije vrijednost $\log(1-v)$ manja ili jednaka od nule, jer vjerojatnost ne može biti veća od 1, pa je stoga $|X| = -X$, možemo napisati konačan izraz:

$$\begin{aligned} 1 - v &= A \log \left[- \left(\frac{a}{-c + \log \frac{T}{Is}} \right)^{1/b} \right] = \\ &= A \log \left[- \left(\frac{-1.8239953290}{\log \frac{T}{204,14937896}} \right)^{1.48327292468} \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Ovdje je $A \log(\xi) = 10^\xi$. Na slici 10 dajemo prikaz izračunate ovisnosti zajedno s izmjerenim vrijednostima. Na istoj slici isprekidanom linijom ucrtana je i ovisnost prema (24), postavljena u područje interimpulsnih razmaka duljih od 20 ms, kako bi se mogla usporediti s ovdje dobivenom razdiobom.

Vidimo da formula oblika (24), odnosno izvorno (22), dobro aproksimira stvarnu razdiobu sve do vrijednosti bezimpulsnog intervala od oko 100 ms. Štoviše, da smo u izvodu tih izraza u poglavlju 3 uzeli u obzir i podatke do 200 ms, dobili bismo nešto drugačije vrijednosti parametara jednadžbe (22), koje bi sasvim dobro, premda ipak nešto lošije, opisivale razdiobu do 200 ms. Međutim, isto tako vidimo da to nije moguće postići za područje iznad oko 200 ms, jer se linija izmjerenih podataka vrlo brzo udaljava od isprekidane.



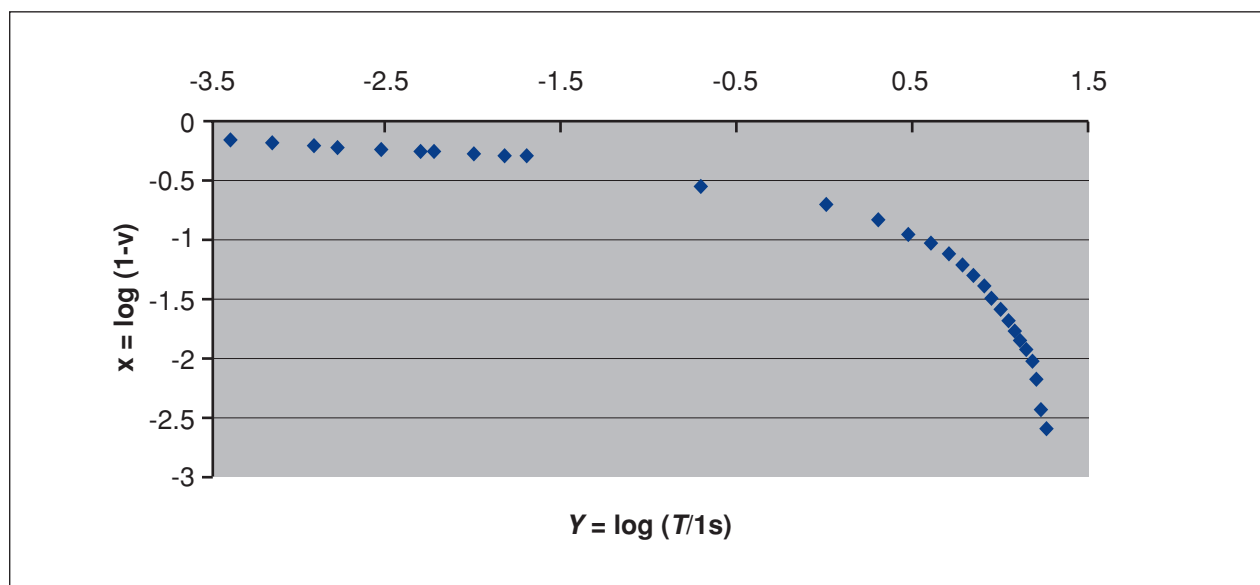
Slika 10. Ovisnost vjerojatnosti prekoračenja o trajanju interimpulsnog intervala. Puna linija: izračunati model; točke: izmjerene vrijednosti. Isprekidana linija prikazuje ovisnost prema jednačbi (24), nastavljenu u područje međupulsnih intervala duljih od 20 ms

Sada ćemo poopćiti ovaj model na sve obuhvaćene vrijednosti T , u čitavom rasponu. Metodom najmanjih kvadrata izvest ćemo izraz oblika (26) za vrijednosti pobrojane u tabelama 3 i 4, s tim da ćemo podatke iz tabele 3 preraditi tako da veličina Y bude definirana kao logaritam vrijednosti T izražene u sekundama. Treba primijetiti da zadnja točka u tabeli 3 i prva u 4 prikazuju isti podatak, tako da je sada novi ukupan broj test točaka jednak $N = 29$. Na slici 11 dajemo grafički prikaz tih 29 točaka u log-log mjerilu. Slika 12 prikazuje pak krivulju sa slike 9, odnosno iz formule (34), produženu u područje interimpulsnih intervala kraćih od 20 ms, u log-log mjerilu. Ta je formula izvedena metodom najmanjih kvadrata samo pomoću posljednjih 20 točaka. Vidi se da čak i pod takvim uvjetima ona vrlo dobro aproksimira vjerojatnost prekoračenja kratkih međupulsnih intervala. Iz toga zaključujemo da se ovakva vrsta modela može proširiti na sve obrađivane vrijednosti.

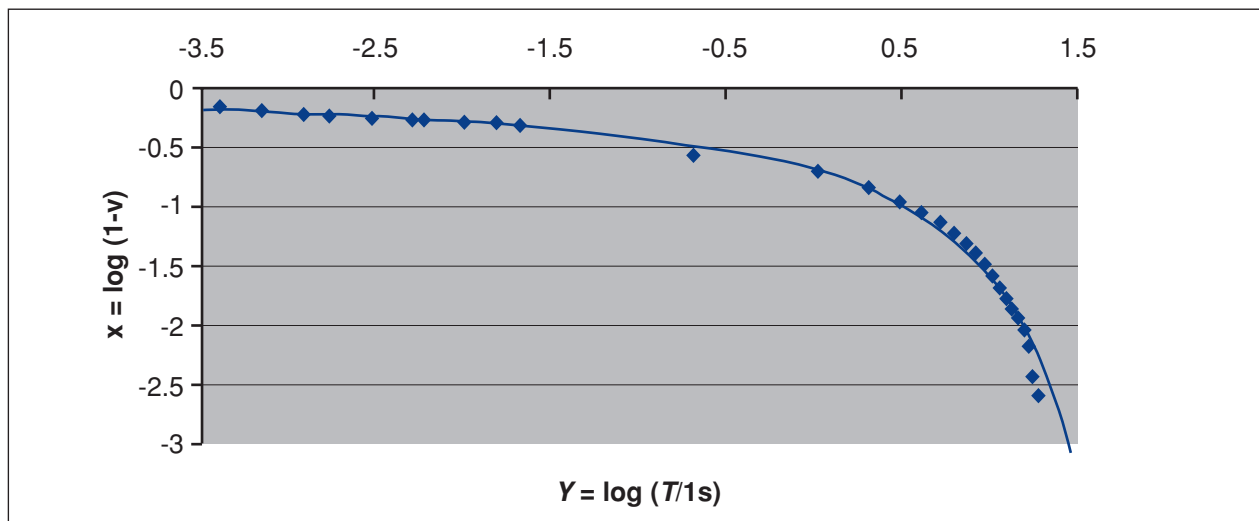
Štoviše, na slici 11 vidi se da se pomoću upotrijebljenog matematičkog modela vrijednosti $\log(1-v)$ za $0.4 \text{ ms} < T < 20 \text{ ms}$ mogu vrlo dobro predvidjeti iz onih za veće vrijednosti T , konkretno za $200 \text{ ms} < T < 18 \text{ s}$. Zbog toga ćemo korištenjem potpuno istog algoritma, koji je opisan ranije u ovom poglavlju, izračunati metodom najmanjih kvadrata parametre modela razdiobe za svih $N = 29$ test točaka. Tako izračunati parametri, koji se odnose na formulu oblika (26), iznose:

$$\begin{aligned} a &= -2.889800506 \\ b &= 0.477540676 \\ c &= 3.286487711 \end{aligned} \quad (35)$$

Vrijednosti su izračunate s ukupno 11 sigurnih decimalnih mjesta, a pritom je iznos relativnog odstupanja prema (33) sveden u optimalnom slučaju na $5.31 \cdot 10^{-11}$. Iz ovoga se, naravno, može izvesti ekvivalentni oblik po uzoru na (34).



Slika 11. Zajednički prikaz svih test točaka u rasponu od 0.4 ms do 18 s



Slika 12. Krivulja sa slike 10, odnosno iz formule (34), produžena nalijevo, u područje interimpulsnih intervala kraćih od 20 ms, u log-log mjerilu. Ta je krivulja izvedena samo pomoću posljednjih 20 točaka, a evidentno je da dobro aproksimira razdiobu i za sve ostale.

Tako izračunat izraz za vjerojatnost prekoračenja unesen je punom linijom u grafikon zajedno s mjernim točkama na slici 13. Isprekidanom linijom nacrtana je radi usporedbe ovisnost dana na prethodnoj slici, izračunata samo pomoću zadnjih 20 točaka.

Sada nastaje pitanje, koja je aproksimacija bolja: ova potonja, koja obuhvaća čitavo područje ulaznih podataka, ili ona sastavljena od jednadžbe (24) za $T < 20$ ms, te od (34) za $T > 20$ ms? Pri tome je jedini mogući kriterij kvadratno odstupanje pojedine razdiobe od mjerenih podataka, ocijenjeno u svih 29 test točaka. Nepravilno bi bilo dati afirmativan sud o točnosti ovoga modela bilo gdje izvan područja obuhvaćenog izmjerenim veličinama, što znači za interimpulsne intervale manje od 0.4 ms, odnosno veće od 18 s. Moguće je ispitati dvije vrste kvadratne pogreške: kada su veličine prikazane logaritamski, odnosno kada su prikazane stvarnom (linearnom) mjerom. Bez obzira je li pojedina for-

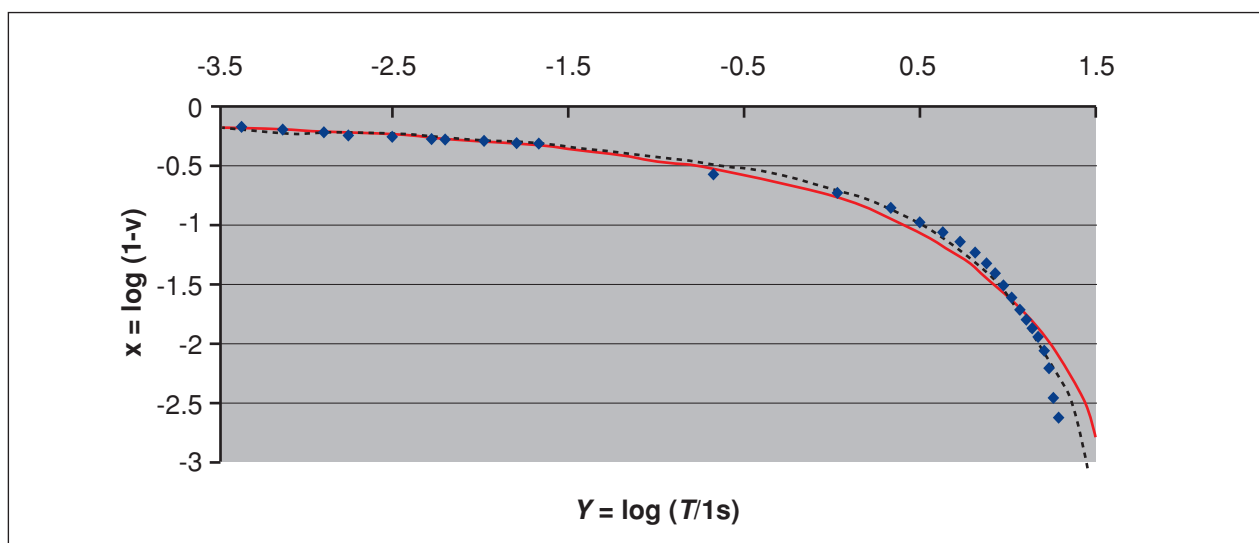
mula izvedena u log-log obliku, ili pak u lin-log obliku, ona se u svakom slučaju elementarnim manipulacijama može napisati u bilo kojoj varijanti, kako je gore već demonstrirano. Naravno da je po kriteriju najmanjih kvadrata svaka formula najbolja u onom obliku u kojem je kao takva izvedena. Definirajmo sljedeće pomoćne oznake za funkcije koje će nam predstavljati modele razdiobe u odgovarajućim područjima:

$F1(X)$ = logaritam veličine Y , izračunate iz formule (22).

$F2(X)$ = formula (26) s parametrima $(a,b,c) = (-1.8239953290, 0.6741847595, 2.3099480631)$.

$F3(X)$ = formula (26) s parametrima $(a,b,c) = (-2.889800506, 0.477540676, 3.286487711)$.

Ukupno kvadratno odstupanje logaritama vrednujemo kako slijedi:



Slika 13. Vjerojatnost prekoračenja prema formuli (26), s parametrima iz (35) (puna linija). Isprekidana linija prikazuje ovisnost prema (34), koja je izračunata samo pomoću posljednjih 20 točaka. Točkama su prikazani izmjereni podaci.

$$\sum_{i=1}^{20} [F3(X_i) - Y_i]^2 = 0.667$$

$$\sum_{i=1}^{10} [F1(X_i) - Y_i]^2 + \sum_{i=11}^{20} [F2(X_i) - Y_i]^2 = 0.948.$$

Po tome kriteriju je bolja zadnja izvedena formula, prema F3.

Ukupno kvadratno odstupanje apsolutnih izvornih (linearnih) vrijednosti, koje se međutim računaju iz ovdje izvedenih izraza, je:

$$\sum_{i=1}^{20} [10^{F3(X_i)} - 10^{Y_i}]^2 = 206.40$$

$$\sum_{i=1}^{10} [10^{F3(X_i)} - 10^{Y_i}]^2 + \sum_{i=11}^{20} [10^{F2(X_i)} - 10^{Y_i}]^2 = 37.181$$

Prema ovome je, naprotiv, bolja aproksimacija s dvije funkcije: F1 za vremena ispod 20 ms, a F2 za ona iznad. Razlog leži u činjenici da je F1 izvedena izvorno kao ovisnost logaritma veličine $1-v$ o vrijednosti T , a ne o njenom logaritmu, tako da ona funkcioniра znatno bolje u tome obliku. Međutim, mi ćemo kao najbolji reprezentant mjernih podataka uzeti model F3, dakle onaj posljednji, jer je on najbolji u onakvim uvjetima u kakvima je izveden, a u smislu najmanjeg ukupnog kvadratnog odstupanja u test točkama. Model F1 je optimalan samo za prikaz vjerojatnosti prekoračenja do 20 ms, kada je ona prikazana u lin-log mjerilu, kao na slici 7. Treba naglasiti da se sve ove opservacije, kao i druge koje se daju iščitati iz različitih dobivenih numeričkih i statističkih parametara, odnose isključivo na set ulaznih podataka, te da se za neki drugi set, makar on reprezentirao esencijalno istu fizikalnu pojavu, odnosi između tih veličina i parametara teoretski mogu promijeniti, tako da im se ne može pripisati opća valjanost.

Ukupno, rezultat razmatranja treba formulirati kao tezu da se vjerojatnost prekoračenja trajanja međuimpulsnog intervala može uspješno matematički modelirati funkcijom F3, u području od 0.4 ms do 18 s. Sasvim je vjerojatno, što se vidi iz slika, da se to može protegnuti i na vrijednosti malo izvan ovih granica, pogotovu na niže, ali se ne može reći koliko. Oblik F3, tj. izvorno (26), ne upućuje na neki fizikalni model kojim bi se mogla objasniti pojava impulsnog šuma na PLC-u. Napose, definitivno se može reći da ovdje opažena pojava nema karakter Poissonovog stohastičkog procesa [13], premda za veće vrijednosti T postoji eksponencijalna ovisnost vjerojatnosti prekoračenja o vremenskoj varijabli.

Na kraju treba nešto reći o uvjetima na rubovima područja definicije funkcije vjerojatnosti prekoračenja. Prvi uvjet obavezan je za sve funkcije vjerojatnosti prekoračenja. Njihova vrijednost mora biti jednaka 1 ako stohastička varijabla poprimi svoju najnižu moguću vrijednost. U našem slučaju, za $T = 0$, ili pak za $\log T \Rightarrow -\alpha$, mora dakle biti $\log(1-v) = 0$. Sve druge vrijednosti logaritma funkcije vjerojatnosti prekoračenja moraju biti negativne, a ona mora biti monotono padajuća. Funkcije oblika (14) i (26) automatski zadovoljavaju taj rubni uvjet. To još uvijek ne znači da one odražavaju stvaran tijek vjerojatnosti prekoračenja za vrlo male iznose T , premda se prema priloženim slikama može smatrati da bilo koji od ovih tipova modela dovoljno dobro opisuje stohastički proces nastajanja impulsnog šuma PLC-a barem

za još jedan red veličine manje vrijednosti T . Nažalost, bez mjerenja s finijom vremenskom rezolucijom to se ne može i dokazati.

Na drugoj strani, kada $T \Rightarrow \alpha$, ne može se neoborivo opravdati niti pobiti zahtjev fizikalne prirode koji se na prvi pogled čini logičnim, naime da logaritam vjerojatnosti prekoračenja divergira prema $-\alpha$. To bi značilo da postoji, makar i najmanja, vjerojatnost da se niti jedan impuls ne pojavi npr. više dana. Strogo gledano, ovdje provedeno istraživanje ne može odlučiti ni za ni protiv takve vrste modela. Ostali nužni uvjeti, koji vrijede za funkciju vjerojatnosti prekoračenja u ovom graničnom području, sadržani su već u tvrdnjama u prethodnom odlomku.

Činjenica je, međutim, da model izveden prema formuli (26) pretpostavlja da logaritam vremenske stohastičke varijable, $\log T$, nikad ne prelazi vrijednost c , što znači da se u našem modelu nikako ne može dogoditi da između dva susjedna impulsa prođe više od 10^c sekundi. To sigurno fizikalno nije korektno, ali, s druge strane, uopće nije važno. Npr. u modelu prema F3 ne bi se mogao pojaviti međuimpulсни interval dulji od približno 32.2 minute. Za razmake dulje od cca. 1.5 minuta vjerojatnost prekoračenja spušta se ispod 10^{-5} . Bitno je da model dobro nadomješta stvarne vjerojatnosti prekoračenja do kojih desetak sekundi ili možda najdalje za još jedan red veličine više, što je našim izrazom gotovo sigurno omogućeno, a eksperimentalno je potvrđeno do nekih 20-ak sekundi.

5. ZAKLJUČAK

Na temelju istraživanja Dosterta i drugih [1 - 4] zaključili smo da se razdiobe osnovnih statističkih parametara impulsnog šuma na distribucijskoj mreži, uz uvjet da u blizini ne postoje dominantni jaki izvori impulsnih smetnji, mogu modelirati općim izrazima sa svega nekoliko parametara, kako slijedi:

- razdioba po amplitudama prema formuli (6), odnosno (8);
- razdioba po trajanju impulsa prema formuli (12);
- razdioba po međuimpulsnom intervalu prema formuli (34), s tim da se za male vrijednosti (ovdje do 20 ms) može preciznije izraziti oblikom prema (24).

Prema literaturi, razumno je očekivati da će se ovakvi oblici pojavljivati i kod mjerenja na drugim lokacijama, uz zadržavanje bitnih uvjeta mjerenja. Međutim, to je potrebno eksperimentalno dokazati.

LITERATURA

- [1] K. DOSTERT, "High Speed Data Transmission over Power Lines Using Multi-Carrier (OFDM) Techniques", *Frequenz*, Vol. 54 (2000), No. 11-12.
- [2] M. ZIMMERMAN, K. DOSTERT, "An Analysis of the Broadband Noise Scenario in Powerline Networks", *Proceedings of the 4th International Symposium on Powerline Communications and its Applications*, Limerick, Ireland, April 5th-7th, 2000, <http://www-iiit.etec.uni-karlsruhe.de/~plc/>
- [3] M. ZIMMERMANN, K. DOSTERT, "Analysis and Modeling of Impulsive Noise in Broad-Band Powerline Communications", *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Vol. 44, No. 1, February 2002.
- [4] K. DOSTERT, "Powerline Communications", Prentice Hall PTR, 2001

- [5] M. H. L. CHAN, R. W. DONALDSON, "Amplitude, Width, and Interarrival Distribution for Noise Impulses on Intrabuilding Power Line Communication Networks", IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, Vol. 31, No. 3, Aug. 1989.
- [6] R. M. VINES et al, "Noise on Residential Power Circuits", IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, Vol. EMC-26, No. 4, Nov. 1984.
- [7] D. LIU et al, "Wide Band AC Power Line Characterization", IEEE Trans. on Consumer Electronics, Vol. 45, No. 4, Nov. 1999.
- [8] O. G. HOOIJEN, "A Channel Model for the Residential Power Circuit Used as a Digital Communications Medium", IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, Vol. 40, No. 4, Nov. 1998.
- [9] D. SABOLIĆ, "O statističkim osobinama uskopojasnog šuma na niskonaponskim električnim instalacijama", Energija, Vol. 51, br. 3, Zagreb, lipanj 2002.
- [10] D. SABOLIĆ, "On The Distribution Network Narrowband Noise Statistics", to be published in the IEEE Transactions on Power Delivery in 2002.
- [11] C. R. WYLIE, L. C. BARRETT, "Advanced Engineering Mathematics", 6th Ed, McGraw Hill, 1995.
- [12] J. B. FRALEIGH, R. A. BEAUREGARD, "Linear Algebra", 3rd Ed, Addison - Wesley, 1995.
- [13] K. F. RILEY, M. P. HOBSON, S. J. BENICE, "Mathematical Methods for Physics and Engineering", Cambridge University Press, 1998.
- STATIC CHARACTERISTICS OF DISTRIBUTION NETWORK IMPULSE NOISE
- Based on the data from literature alternative mathematical models of stochastic amplitude distribution are developed as well as duration of impulse disturbance package on PLC media and time difference between neighbouring packages.
- ÜBER STATISCHE EIGENSCHAFTEN DES IMPULSGERÄUSCHES IM VERTEILUNGSNETZ
- Auf Grund der Angaben in der Literatur werden alternative mathematische Modelle der stochastischen Verteilung der Amplituden, der Dauer von Störimpulspaketen in der PLC (Power Line Carrier = Stromleitung als Datenträger), und der dazwischen liegenden Pausen, gebildet.
- Naslov pisca:
- Mr. sc. Dubravko Sabolić, dipl. ing.
HEP Prijenos d.o.o.
Ulica grada Vukovara 37
10000 Zagreb, Hrvatska**
- Uredništvo primilo rukopis:
2002-07-27