

# POOPĆENJE PROPAGACIJSKIH MODELA ZASNOVANIH U VREMENSKOJ DOMENI ZA PLC MREŽE

Dr. sc. Dubravko SABOLIĆ, Zagreb

UDK 621.316.1:654.01  
IZVORNI ZNANSTVENI ČLANAK

U radu se generalizira propagacijski model za PLC mreže, odnosno, razvija se matematički algoritam za prebrojavanje modova širenja u složenim mrežama. Utvrđuju se također i asimptotska svojstva vremenskog odziva svih razdjelnih mreža. Zaključuje se da propagacijski modeli utemeljeni u vremenskoj domeni, primijenjeni na realne (složene) mreže, zahtijevaju suviše računalnog napora, odnosno, da je bolje problemu pristupiti u frekvencijskoj domeni.

**Ključne riječi:** propagacija, vremenska domena, razdjelna mreža, složena mreža.

## 1. UVOD

Važnost definiranja propagacijskog modela za komunikacije PLC mrežom nije potrebno posebno isticati. Poznavanje propagacijskih svojstava važno je ponajprije zbog projektiranja budućih komunikacijskih mreža u konkretnom okruženju. Cilj istraživanja propagacijskih modela možemo sažeti u nekoliko rečenica: Na temelju računalnih simulacija i u literaturi raspoloživih modela, te uz provjeru na jednostavnom stvarnom modelu i, na kraju, na stvarnim instalacijama, potrebno je pronaći jednostavan model proračuna propagacijskih svojstava komunikacijskog kanala. To obuhvaća veličine statističkog karaktera, poput prosječnog gušenja i disperzije gušenja, prijenosne funkcije, odnosno, ako se ustanovi takva potreba, statistike drugog reda prijemnog signala. Model treba funkcionirati tako da se osnovno gušenje može izračunati samo iz topoloških i temeljnih električnih svojstava instalacije. Dodatni faktori očekivanog gušenja trebaju se računati iz predvidivih ili konstatiranih posebnih okolnosti u blizini prijemnog i odašiljačkog mjesta. Model mora biti primjenjiv za široki raspon frekvencija. Potrebno je ustanoviti do koje se mjere fizikalno utemeljeni i izvedeni model zbog unutarnje topološke pravilnosti mreže može svesti na takav, model koji zahtijeva minimalan broj ulaznih podataka.

Propagacija kroz PLC mrežu studirana je i objavljena u više radova, npr. [1–9]. U njima su pokrivena područja najnižih frekvencija, ispod 1 MHz, dok neki prezentirani modeli dosežu 20 MHz. U [5] je načinjena eksperimentalna studija propagacije u vremenskoj domeni, koja je obuhvatila područje do 60 MHz, ali koja nije rezultirala u računskom modelu.

## 2. MODEL PROPAGACIJE NA BAZI IMPULSNOG ODZIVA, PREMA DOSTERTU

Ovdje zbog uvoda u šira razmatranja propagacije, utemeljena na konceptu izračunavanja impulsnog odziva kanala, prenosimo echo-model prema Dostertu [6, 7].

Koncept polazi od toga da mreža nije homogena, odnosno da u njoj postoji izvjestan broj diskontinuiteta, zbog kojih dolazi do višestruke propagacije (multipath), tako da se odziv na pobudu Diracovim impulsom,  $\delta(t)$ , na predajničkom kraju, na prijamom mjestu vidi kao sukcesivni niz Diracovih impulsa s promijenjenim iznosima,  $c_i$ , i nejednakim kašnjenjima,  $\tau_i$ :

$$h(t) = \sum_{i=1}^N c_i \delta(t - \tau_i). \quad (1)$$

Fourierovom transformacijom dobiva se prijenosna funkcija sustava u frekvencijskoj domeni:

$$H(f) = \sum_{i=1}^N c_i \exp(-j2\pi f \tau_i). \quad (2)$$

Faktori  $c_i$  dobiju se tako da se pomnože svi faktori refleksije i transmisije na  $i$ -tom putu propagacije signala, nakon čega se još dodaje i faktor prigušenja zbog prolaska ukupnom duljinom  $i$ -tog puta,  $l_i$ , pri čemu se zbrajaju sve duljine onoliko puta koliko je signal njima prošao zbog višestrukih refleksija. Simbolički,  $c_i$  se može izraziti kao:

$$c_i = \left( \prod_{(i)} (\rho) \prod_{(i)} (\vartheta) \right) \cdot \exp \left( -\alpha \sum_{(i)} (l) \right) = a_i \exp(-\alpha l_i). \quad (3)$$

Ovdje su  $\rho$ ,  $\vartheta$  i  $\alpha$  redom: faktor refleksije, faktor transmisije, odnosno realna konstanta širenja. Broj  $a_i$  sadrži u sebi umnoške svih faktora refleksija i transmisija na promatranom  $i$ -tom putu.

To je sve što se može dobiti iz izračunatih podataka  $c_i$  i  $\tau_i$ . Funkcija  $H(f)$  ne predstavlja dobru aproksimaciju, jer ni na koji način ne uzima u obzir frekvencijsku ovisnost elektromagnetskih svojstava mreže, koja se u vremenskom odzivu manifestira materijalnom disperzijom impulsa, zbog čega u stvarnosti impulsi na izlazu bivaju proširenima u vremenu u odnosu na ulazni impuls. U frekvencijskoj domeni, kada ne bi bilo materijalne disperzije, ili, drukčije rečeno, kada bi elektromagnetska svojstva mreže bila neovisna o frekvenciji, prijenosna bi funkcija bila točno razmjerna sa  $H(f)$ . U prezentiranom modelu frekvencijska ovisnost svojstava materijala uzima se u obzir uvođenjem kompleksne konstante širenja,  $\gamma$ . Ona je jednaka [10]:

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \approx \frac{R}{2Z_0} + \frac{GZ_0}{2} + j\omega\sqrt{LC} = \alpha + j\beta. \quad (4)$$

$R, L, G$  i  $C$  su podužni specifični otpor, induktivitet, vodljivost i kapacitet linije.  $Z_0 = \sqrt{L/C}$ .

Aproksimacija linijom slabih gubitaka vrijedi samo ako je radni podužni otpor mnogo manji od podužne induktancije, a radna podužna vodljivost mnogo manja od podužne kapacitivne susceptancije, što se može pretpostaviti za frekvencije od interesa (1 MHz i više). Prema (3), nas ovdje primarno interesira ponašanje faktora  $\alpha$ . Za  $\beta$  je jasno da je on razmjernan frekvenciji, a jednak je točno omjeru kružne frekvencije,  $\omega$ , i fazne brzine širenja,  $v_p$ , koja pak iznosi  $1/\sqrt{LC}$ . Fazna brzina u promatranom PLC mediju mjeri se vrlo jednostavno, s obzirom na dobro poznatu eksperimentalnu činjenicu da je ona, barem u nama zanimljivom rasponu frekvencija, gotovo posve neovisna o frekvenciji [6]. To nam omogućuje da faznu brzinu jednostavno očitamo iz frekvencijske karakteristike impedancije snimljene na bilo kojem mjestu i u bilo kojem stanju mreže, ako znamo koja ključna gabaritna dužinska mjera topološke strukture mreže dominantno određuje njezina svojstva u pogledu frekvencijske periodičnosti, a ta se mjera u pravilu može saznati dosta točno iz projekta instalacije, ili izravnim mjerenjem. Alternativno, moguće je izvesti najjednostavnije mjerenje ulazne impedancije određene vrste kabela točno poznate duljine, s npr. kratko spojenim drugim krajem.

Član  $R/(2Z_0)$  u jednadžbi (4) posljedica je skin-efekta, a  $GZ_0/2$  dielektričkih gubitaka izolacijskog materijala u mreži, najčešće PVC-a. S obzirom na to, aproksimativno se može ustvrditi da je član koji predstavlja skin-efekt razmjernan korijenu frekvencije, a član koji reprezentira dielektričke gubitke razmjernan je prvoj potenciji frekvencije [10]. Na temelju eksperimentalno utvrđenog ponašanja

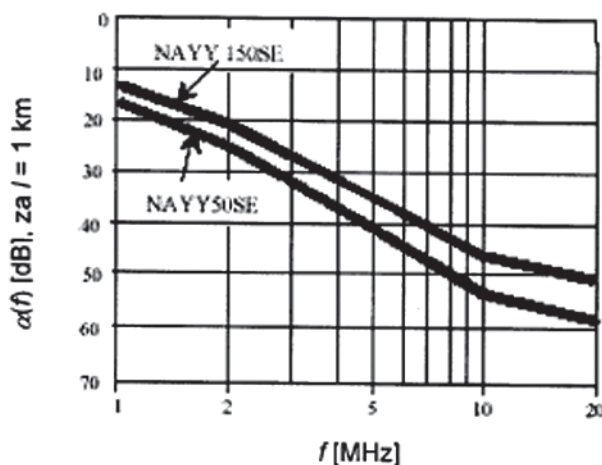
faktora prigušenja u kabelima [7], može se doći do još malo jednostavnije aproksimacije:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 f^k. \quad (5)$$

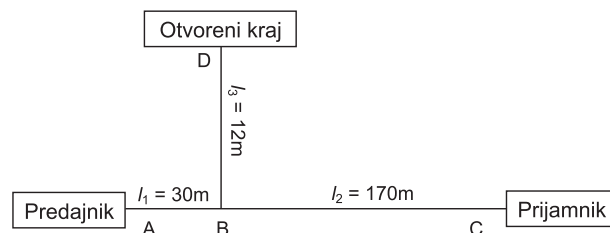
Vrijednosti  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  i  $k$  specifične su za svaku pojedinu vrstu kabela. Eksponent  $k$  kreće se redovito u dosta uskim granicama, između 0.5 i 0.7. Stoga je ova aproksimacija zgodna za uporabu u modelima. Na kraju, povežavši izraze (2), (3) i (5), dobivamo konačan izraz za prijenosnu funkciju sustava:

$$H(f) = \sum_{i=1}^N a_i \cdot \exp(-\alpha_0 - \alpha_1 f^k) l_i \cdot \exp(-j2\pi f \tau_i). \quad (6)$$

Na slici 1 prenosimo prikaz ovisnosti gušenja za dva tipa kabela koji se koriste u vanjskim distribucijskim mrežama, prema [6]. Slika 2. prikazuje jednostavnu mrežu, koja je upotrijebljena za provjeru Dostertovoga modela [6, 7].



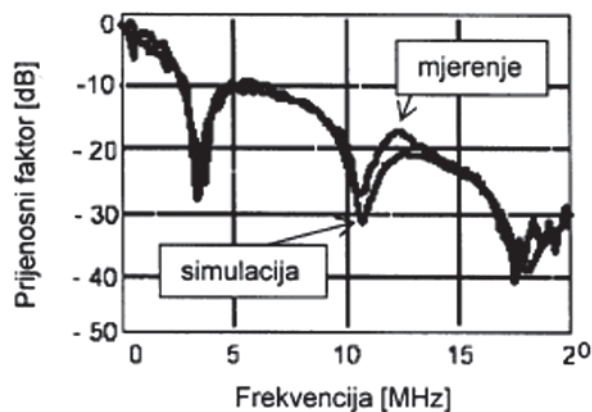
Slika 1. Primjer frekvencijske ovisnosti gušenja dvaju tipova kabela [6].



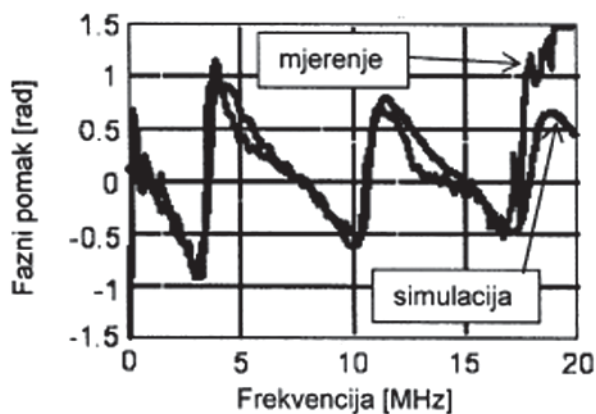
Slika 2. Konfiguracija mreže za provjeru Dostertovog modela propagacije [6,7].

Slika 3. prikazuje, na temelju [6], usporedbu mjerenih i simuliranih karakteristika kanala definiranog slikom 2., kada je za simulaciju bilo korišteno samo prvih 6 odjeka. Vidi se da simulacija u bitnome izuzetno dobro aproksimira stvarne karakteristike kanala, unatoč malom broju odjeka koji je uzet u obzir. To se objašnjava činjenicom da višestruko reflektirani impulsi prolaze dulje puteve, pa

se više prigušuju u dielektriku kabela. Isto tako, oni se više puta reflektiraju, odnosno prelaze preko čvorova u mreži, a svaka refleksija ili prolazak također značajno smanjuju amplitudu impulsa. Zbog toga odjeci višega reda, s većim kašnjenjem u odnosu na prvi impuls, imaju bitno niže amplitude, pa slabo utječu na rezultat. Usporedno s porastom reda odjeka, raste i njihov broj, a u složenim mrežama s porastom reda odjeka koji se promatraju raste i njihova gustoća na vremenskoj osi. Zato se zanemarivanjem odjeka višega reda gubi fina struktura karakteristike, kao što se to na slici 3. lijepo vidi. No, za proračune ona zapravo nije ni važna.



(a)



(b)

**Slika 3.** Usporedba simulacije pomoću 6 najjačih odjeka i mjerenja, za konfiguraciju na slici 2, sve prema [6]. (a) Amplitudno – frekvencijska karakteristika. (b) Fazno – frekvencijska karakteristika.

Pojasnimo ovdje pojam *reda* odjeka. Impuls nultog reda je onaj koji stiže najkraćim mogućim putem od prijamika do predajnika. On *sigurno* stiže prvi i *sigurno* ima najveću amplitudu, čiji polaritet *uvijek* odgovara polaritetu pobude. Impulsi, ili *modovi*, prvoga reda su svi oni, koji dožive samo jednu refleksiju ili prolaz divergentan od najkraće moguće

staze, plus samo jednu refleksiju na povratku k njoj. Oni svi stižu u isto vrijeme samo ako su sve grane u mreži jednako duge i građene od istoga materijala. U protivnom, njihovo kašnjenje može značajno varirati. Modovi drugoga reda su svi oni koji prolaze ukupno dvije refleksije/prolaska kojima se udaljavaju od najkraćega puta, te ukupno barem jednu refleksiju i jedan prolazak, ili pak dvije refleksije, na putu natrag prema najkraćemu. I tako redom... S ovim pojmom ćemo se opet sresti kada budemo raspravljali o topološkim osobinama grafa instalacijske mreže.

Pogledajmo sada sliku 2. Čak i pod nerealnom pretpostavkom da su i prijamik i predajnik prilagođeni na impedancije prisutne na njihovim prilazima, može se zapaziti beskonačan broj modova koji će se razviti na odsječku  $l_3$ . Primjera radi, u tablici 1. nabrojiti ćemo nekoliko modova u takvome slučaju, i navesti iznose njihovih faktora  $a_p$ , odnosno ukupnih duljina puteva  $l_p$ , prema (4). Ovaj je primjer [7] toliko jednostavan, da postoji samo jedan mod svakoga reda, pa se može pronaći zatvoreni izraz za slabljenje  $i$ -tog moda, također prema (4).

**Tablica 1.** Modovi u mreži sa slike 2.

R.b. moda	Put	Slabljenje u čvorovima	Prevaljeni put
0.	A–B–C	$\tau_{1B}$	$l_1 + l_2$
1.	A–B–D–B–C	$\tau_{1B} \rho_{3D} \tau_{3B}$	$l_1 + 2l_3 + l_2$
...	...	...	...
$i$ .	A–B–(D–B) <sup><math>i</math></sup> –C	$\tau_{1B} \rho_{3D} (\rho_{3B} \rho_{3D})^{i-1} \tau_{3B}$	$l_1 + 2i l_3 + l_2$

Ovdje oznake  $\tau_{xy}$  znače faktor transmisije kod prolaska signala iz grane x kroz točku Y dalje, a oznake  $\rho_{xy}$  znače faktor refleksije kada signal iz grane x stiže i reflektira se u točki Y. Oznake  $l_x$  odgovaraju duljinama grana x, kao na slici 2. Važno je napomenuti da se faktori refleksije i transmisije za ovakav model određuju klasično [10], samo što se u račun uzimaju valne impedancije vodova koji se sastaju u pojedinom čvoru, a ne transformirane impedancije njihovih zaključenja na drugoj strani. To je zbog načela kauzalnosti: mi promatramo beskonačno kratkotrajnu matematičku tvorevinu, Diracov impuls. U trenutku kada on naiđe na diskontinuitet u nekom čvoru, važne su samo impedantne prilike u njegovoj najbližoj (diferencijalnoj) okolini, a one su sadržane u valnim impedancijama. Utjecaj zaključenja na drugoj strani linija koje se sastaju u promatranom čvoru ne može se nikako očitovati, jer Diracov impuls nema trajanja, a brzina propagacije je konačna. Ovo razmatranje posve točno vrijedi i za sve one impulse, bilo kakvoga valnog oblika, koji su dovoljno kratkotrajni da bi napustili promatrani čvor prije nego li se vrati odjek njihovog početnog brida s druge strane.

Sada ćemo nabrojiti nekoliko puteva nižeg reda, kada pretpostavimo realniju situaciju, da zaključenja ni u kojem prilazu ove jednostavne mreže nisu prilagođena, pa se i na njima događaju refleksije. Tada se raspiruje znatno veći broj modova:

$$\begin{aligned}
 &A - B - C \\
 &A - B - (D - B)^j - C \\
 &A - B - (D - B)^j - (C - B)^j - C \\
 &(A - B)^k - (D - B)^j - (C - B)^j - C.
 \end{aligned}$$

Trojke prirodnih brojeva  $(i, j, k)$  mogu se pojaviti u svim mogućim kombinacijama. Red pojedinog moda određen je zbrojem  $i + j + k$ . Modovi istoga reda ne dolaze na cilj u isto vrijeme. Evidentno je da se već na ovako jednostavnoj mreži situacija silno komplicira, premda u njoj postoji minimalan mogući broj čvorova, 4. Odatle izlazi kritika Dostertovoga modela. Potrebno je dokazati može li on u složenim mrežama uopće funkcionirati. Ako se njegovo načelo stavi u eksperimentalni kontekst, situacija je drugačija. Snimanjem impulsnog odziva mreže može se pronaći frekvencijska karakteristika, što je u osnovi praktično, i nije prekomplikirano, s obzirom da mnogi današnji digitalni osciloskopi imaju ugrađene algoritme za brzu Fourierovu transformaciju. No, takva mogućnost izlazi iz osnova linearnih sustava [11, 12]. Jednu primjenu vidimo i u [5]. Ovdje se više ne radi o računskom modelu za predikciju gušenja kanala, nego je naprosto riječ o mjerenju.

Pogledajmo sada поближе test – shemu Dostertovoga modela na slici 2. S obzirom da se, kao u [7], pretpostavlja da su prijamnik i predajnik prilagođeni, svi modovi nastaju na odsječku B – D, a zbog toga niz faktora  $\alpha_i$  prema (3) čini padajući geometrijski niz, dok niz duljina  $l_i$  čini rastući aritmetički niz. Tako prijenosna funkcija ima konačan oblik:

$$\begin{aligned}
 H(f) = &H_0(f) + H_{1-N}(f) = \tau_{1B} \exp[-\alpha(l_1 + l_2)] + \\
 &+ \sum_{i=1}^N \tau_{1B} \rho_{3D} \tau_{3B} (\rho_{3B} \rho_{3D})^{i-1} \exp[-\alpha(l_1 + l_2 + \\
 &+ 2il_3)] \exp[-j2\pi f(2il_3 / v_p)] \quad (7)
 \end{aligned}$$

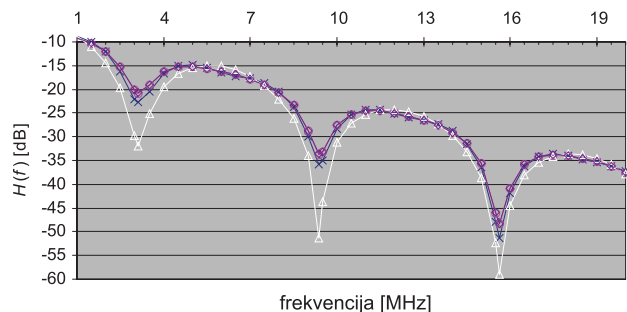
Ispitat ćemo konvergenciju modula prijenosne funkcije,  $|H(f)|$ , u ovisnosti o broju  $N$ . Numeričke iznose faktora refleksije i transmisije odredit ćemo uz pretpostavku da su svi odsječci kabela jednakih svojstava na svim frekvencijama, pa će za zamišljeni Diracov impuls svi faktori refleksije u točki B sa slike 2. iznositi  $-(1/3)$ , dok će svi faktori transmisije u toj točki biti jednaki  $+(2/3)$ . Faktor refleksije u točki D jednak je  $+1$  (otvoreni kraj). Svojstva kabela preuzet ćemo iz modela prema [7]:

$\alpha = 0.0021 + 8.1 \cdot 10^{-10} f/\text{Hz}$ . Fazna brzina  $v_p$  za polietilen je približno jednaka  $1.5 \cdot 10^8$  m/s. Tako se gornja formula svodi na:

$$\begin{aligned}
 H(f) = &\frac{1}{3} \exp\left[200 \cdot (-0.0021 - 8.1 \cdot 10^{-10} \frac{f}{\text{Hz}})\right] + \\
 &+ \frac{4}{9} \sum_{i=1}^N \left(-\frac{1}{3}\right)^{i-1} \exp\left[(-0.0021 - 8.1 \cdot 10^{-10} \frac{f}{\text{Hz}})(200 + 24i)\right] \exp\left[-j2\pi \frac{f}{\text{Hz}} \cdot 1.6 \cdot 10^{-7} \cdot i\right].
 \end{aligned}$$

Na slici 4. prikazano je kako gornji izraz konvergira s povećanjem  $N$ . Povećavanjem toga broja iznad 2 ustvari se ne dobiva ništa bolji model. To je zbog krajnje jednostavnosti mreže i pretpostavljenog obostranog prilagođenja.

Ključno je pitanje u kolikoj mjeri se složenije mreže mogu modelirati samo pomoću malog broja odjeka, i je li moguće računski, iz poznate topologije mreže, a bez mjerenja, na neki način procijeniti iznos onolikog broja odjeka koliki je potreban da bi se načinio vjerodostojan, odnosno uporabljiv, model. U [7] obavljeno je mjerenje na stvarnoj mreži nepoznate topologije, nakon čega je u obzir uzeto samo ukupno 4 odjeka, uključujući i onaj najjači, s kojima se obavlja simulacija kao u gornjem primjeru. Pritom je postignuto vrlo dobro slaganje, osim možda u najnižem frekvencijskom opsegu, ispod 2 MHz. Iz toga zaključujemo da vjerojatno i u složenim mrežama može funkcionirati ovakav praktičarski koncept, ali je u razvoju teoretskog modela potrebno obratiti pažnju na to da zbog inherentne periodičnosti instalacija postoji više, a ponekad i mnogo, jednako dugačkih puteva širenja signala, pa iznalaženje amplitude pojedinih odjeka ni izdaleka nije trivijalno kao u izloženom primjeru iz [7]. Ako bi se uspjeli prebrojiti svi, ili barem najdominantniji, modovi širenja koji imaju jednaka vremena kašnjenja, mogao bi se formirati odgovarajući teoretski model, koji bi omogućio predikciju propagacijskih prilika uz nužno poznavanje samo elektromagnetskih svojstava upotrijebljenih kabela.



**Slika 4.** Konvergencija reda (7) za test – model prema [7]. Trokut:  $N = 1$ . Križić:  $N = 2$ . Kružić:  $N = 4$ . Romb:  $N = 10$ . Broj  $N$  govori koliko je viših modova, uz onaj osnovni, korišteno u računu. Vidi se da red vrlo brzo konvergira, tako da model u danoj situaciji dobro funkcionira već za  $N = 2$ , odnosno kada se u obzir uzimaju samo tri najjača odjeka. Za  $N = 1$  ne postiže se dobra reprodukcija zapornih područja, kada modul prijenosne funkcije najviše opada. Model je tada suviše pesimističan. Konvergencija je evidentno znatno brža na visokim frekvencijama.

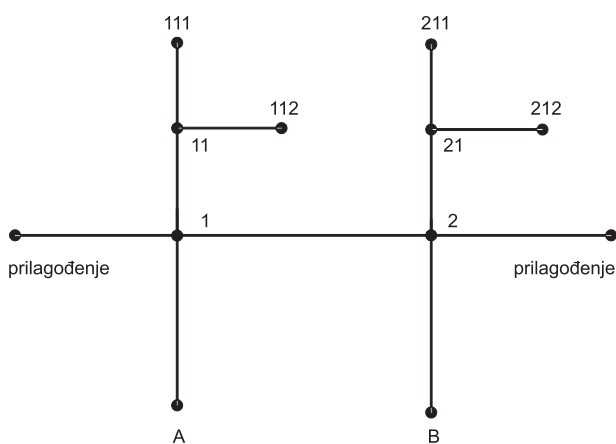
### 3. MODEL PROPAGACIJE NA BAZI IMPULSNOG ODZIVA, U UVJETIMA SLOŽENE INSTALACIJSKE MREŽE

U ovome poglavlju ćemo demonstrirati matematički formalizam potreban za razvoj propagacijskog modela baziranog na osluškivanju odjeka prouzročenih pobudom



ulaza Diracovim impulsom, s kasnijom korekcijom gušenja u frekvencijskoj domeni. Razmatrat ćemo jednu elementarnu strukturu ilustrativnu za instalacijske mreže u zgradama. Takve strukture nisu, naravno, jedino moguće, ali su dosta indikativne, a poznavanje njihovih svojstava kao elementarnih jedinica može pomoći u izračunu propagacijskih svojstava većih periodičkih struktura sastavljenih od takvih elemenata. Istim metodama mogu se analizirati i druge slične strukture. Shema strukture dana je na slici 5.

Čvor označen riječju “prilagođenje” simbolizira samo činjenicu da sustav može gubiti energiju i otecanjem u druge dijelove mreže, a to ćemo modelirati prilagođenim čvorom, koji se u računima neće pojavljivati, osim što će pripadna grana utjecati na faktore refleksije i transmisije u čvoru 1 i čvoru 2. Kako bismo mogli nastaviti s izlaganjem, moramo najprije pažljivo sistematizirati sve klase objekata koji se pojavljuju u razmatranju, a njih je nekoliko.



Slika 5. Promatrana elementarna razdjelna struktura.

### 3.1. Klasifikacija čvorova

U gornjim mrežama modelirat ćemo tri osnovne vrste čvorova prema svojstvima refleksivnosti i propusnosti za zamišljene Diracove impulse:

- Čvor klase  $P$  s paralelnim spojem. To je najčešći spoj. Riječ je npr. o priključku utičnice na razvodnu granu instalacije. Pretpostavlja se da su valne impedancije svih  $N$  linija koje se sastaju u čvoru međusobno jednake, pa se faktori transmisije i refleksije u čvoru računaju jednostavno kao:  $\rho_p = 2/N$ ;  $\vartheta_p = -1 + (2/N)$ . Kako je  $N$  uvijek veći od 2, jer u protivnom to ne bi bio čvor, refleksija na čvoru tipa  $P$  uvijek okreće polaritet impulsa.

- Čvor klase  $S$  sa serijskim spojem linija u čvoru. Ovaj spoj radovito se javlja kod spajanja sklopke u granu trošila, kada sklopka nije smještena na samom tijelu trošila, niti u njegovoj neposrednoj blizini. Primjerice, sklopke rasvjetnih tijela uobičajeno su dosta udaljene od njih samih. Iako je prava rijetkost da se u takvom čvoru sastaje više od tri

linije, izrazit ćemo faktore transmisije i refleksije za bilo koji  $N$ :

$$\vartheta_s = 2/N$$

$$\rho_s = 1 - (2/N)$$

- Čvor klase  $T$ , ili terminalni čvor. To je mjesto gdje je priključeno, ili bi moglo biti priključeno, trošilo, odnosno, u kojega ulazi samo jedna linija. Zaključenje takvoga čvora ostvareno je impedancijom trošila, koja može biti praktički proizvoljna i kompleksna, te ovisna o frekvenciji. Ovakvi čvorovi će zato u pravilu biti dosta refleksivni, i zapravo ih je najteže precizno modelirati.

### 3.2. Konvencija o obilježavanju čvorova

S obzirom da su instalacijske mreže uvijek građene u obliku stabla, što znači da njihovi grafovi nemaju zatvorenih petlji, uvest ćemo oznake kao na slici 5. Predajni i prijami čvor označavat ćemo sa  $A$  i  $B$ . Čvorove koji se nalaze na najkraćem putu između  $A$  i  $B$ , a to su u našim slučajevima oni koji su smješteni na razvodnoj grani instalacije, označavat ćemo jednom znamenkom. Sve su ovo čvorovi prve razine.

Čvorovi druge razine su oni koji nisu prve razine, a vezani su direktno na čvorove prve razine samo jednom granom. Označavat ćemo ih dvoznamenkasto. Prva znamenka indicira čvor prve razine na koji se nadovezuje promatrani čvor, a druga znamenka služi da pojedinačno identificira čvorove druge razine spojene na određeni čvor prve razine, ako takvih ima više. U našim slučajevima nema, pa su jedine oznake druge razine 11, odnosno 21.

Čvorovi treće razine su oni koji nisu ni prve ni druge razine, a vezani su na čvorove druge razine samo jednom granom, a nemaju veze s čvorovima prve razine. Označavat ćemo ih troznamenkasto. Prve dvije znamenke indiciraju čvor druge razine na koji se nadovezuje promatrani čvor, a treća znamenka služi da pojedinačno identificira čvorove treće razine spojene na određeni čvor druge razine, ako takvih ima više. U našim slučajevima ih ima, i oni se vide na slikama pod oznakama 111, 112, 211 i 212. Atributi koji se moraju memorirati za svaki čvor su:

- njegova oznaka po upravo objašnjenju konvenciji, koja ga smješta u prostoru,
- njegova klasa, koja određuje svojstva refleksivnosti i transmitivnosti, te
- broj  $N$  za čvorove klase  $P$  i  $S$ , koji određuje faktore refleksije i transmisije za Diracove impulse; odnosno kompleksni faktor refleksije za čvorove klase  $T$ .

Čvorovi klase  $T$  uvijek reflektiraju signal. Čvorovi klase  $P$  i  $S$  mogu i transmitirati i reflektirati. Kod računanja težinskih faktora  $a$ , prema (6) program će odlučiti hoće li u danom koraku računati refleksiju ili transmisiju na temelju tročlane sekvencije u čijoj sredini se pojavljuje čvor  $X$ . Ako sekvencija ima oblik ...  $Y - X - Z$  ..., radi se o transmisiji, a ako je oblik ovakav: ...  $Y - X - Y$  ..., riječ je evidentno o

refleksiji. X, Y, i Z su oznake bilo kojih čvorova, s tim da su Y i Z susjedni sa X.

### 3.3. Konvencija o redu modova

Pod pojmom “mod” podrazumijevat ćemo bilo koji način širenja preko bilo kojih čvorova mreže, pod uvjetom da je on moguć. Mod nultog reda, ili osnovni mod, je onaj koji se ostvaruje najkraćim putem između točaka A i B. Primjerice, na slici 5, taj put je: A – 1 – 2 – B. On u sebi uključuje dvije transmisije, kroz čvorove 1 i 2.

Mod prvoga reda je onaj mod koji se od osnovnoga razlikuje za minimalan mogući broj izleta od najkraćega puta, s povratkom, dakle za jedan izlet s povratkom. Izleti se mogu događati zbog transmitiranja u čvorovima 1. razine prema čvorovima druge razine, ili zbog refleksija između čvorova prve razine. U tom slučaju, mod prvoga reda sadrži u sebi sve transmisije kao i mod nultoga reda, a k tome još i jednu transmisiju na čvoru 1. razine i jednu refleksiju na čvoru druge razine; odnosno, dvije refleksije na dva različita čvora prve razine, uključujući i A i B. Naime, u našim razmatranjima nećemo a priori smatrati da je prilagođenje izvršeno u ma kojoj točki mreže, osim u onima označenima riječju “prilagođenje”. Evo za primjer svih modova prvoga reda koji se razvijaju u mreži prema slici 5:

A – 1 – 2 – 1 – 2 – B

A – 1 – A – 1 – 2 – B

A – 1 – 2 – B – 2 – B

A – 1 – 11 – 1 – 2 – B

A – 1 – 2 – 21 – 2 – B

Modovi prvoga reda uključuju čvorove do najviše druge razine. Zanimljivo je na ovome mjestu primijetiti zapravo najveći problem kod ovakve vrste modela: ako su npr. sve grane grafa jednako duge, svi modovi istoga reda imaju jednako vrijeme kašnjenja, pa se na prijamoj strani vide kao jedan impuls. Ključni problem je pronaći amplitudu toga impulsa, a to je sve prije nego li jednostavno, posebice kada se radi o modovima višega reda.

Modovi drugoga reda su svi oni koji sadrže samo jedan izlet s povratkom od bilo kojeg od modova prvoga reda, pa oni mogu u sebi uključivati čvorove do najviše treće razine. Sistematično bismo mogli napisati sve te modove tako da uzmemo jedan po jedan od maločas nabrojanih modova prvog reda, i pridijelimo im sve moguće kombinacije s još jednim dodatnim izletom.

Modovi višega reda nastaju na analogan način. Važno je zamijetiti sve moguće izlete od svih mogućih modova prethodnog reda. Malo kasnije ćemo objasniti jednostavan sistematičan postupak koji omogućava prebrojavanje modova računalom.

### 3.4. Tablica mogućih tranzicija

Ova tablica sadrži sistematičan popis svih mogućih prijelaza matematičkog Diracovog signala između čvorova konkretne mreže. Prelasci kojih nema u toj tablici nisu mogući. Dopušteno je samo kretanje signala između čvorova koji su povezani granom grafa, u oba smjera. Nedopušteno je tranzitiranje iz jednoga čvora u njega samoga. Osim popisa mogućih tranzicija, za izvođenje programa proračuna propagacije svakoj mogućoj tranziciji mora se pripisati atribut fizičke duljine i fazne brzine, koja najviše ovisi o mediju izolatora. Alternativno, umjesto ova dva podatka dovoljno je memorirati vrijeme propagacije. S obzirom da je većina instalacijskih kabela izrađena s PVC izolacijom, fazna brzina može se držati približno jednakom za sve odsječke, pa je važan podatak zapravo duljina odsječka definiranog početnim i završnim čvorom. Iz nje slijedi i gušenje razmjerno sa  $\alpha$ . Tablica 2. predstavlja skup svih mogućih tranzicija za shemu prema slici 5. Čvorovi označeni sa “prilagođenje” su izostavljeni, jer ne doprinose raspirivanju modova.

Za bilo koju drugu shemu moguće je načiniti ovakvu tablicu na istim načelima, očitavanjem iz grafa. Ona je *jedinstveni odraz topoloških svojstava mreže* i, s tim u vezi, pravila izvođenja elementarnih šetnji Diracovih impulsa kroz mrežu.

Tablica 2. Popis svih mogućih tranzicija za shemu na slici 5.

Polazni čvor	Svi mogući ciljni čvorovi
A	1
1	A, 11, 2
11	1, 111, 112
111	11
112	11
2	B, 21, 1
21	2, 211, 212
211	21
212	21
B	2

### 3.5. Dokaz o jedinstvenoj parnosti broja tranzicija u svim modovima

Svi modovi u svakoj pojedinoj od naših shema kojima se bavimo imaju broj tranzicija, odnosno broj prelazaka Diracovog impulsa između dvaju susjednih čvorova, ili broj *elementarnih šetnji*, uvijek iste parnosti. Dakle, u svakoj shemi koja je stablastog tipa bez petlje je taj broj ili paran ili neparan. Pod pojmom elementarne šetnje smatramo upravo prelazak signala iz nekoga čvora u prvi njemu susjedni, povezan s njime jednim bridom grafa. Razumije se da ovdje govorimo samo o mogućim prelascima, koji su određeni topologijom grafa, a vide se i iz tablice mogućih tranzicija. U tekstu koji slijedi koristit ćemo pojmove iz diskretne matematike, kako su oni definirani u [13].

Parnost je određena parnošću broja elementarnih šetnji u modu nultog reda, dakle na najkraćem putu od izvora A do odredišta B. Ako osnovni mod ima u sebi paran broj elementarnih šetnji, tada svi modovi imaju upravo paran broj elementarnih šetnji. Ako osnovni mod sadrži neparan broj tranzicija, neparan je i njihov broj u svim drugim modovima. U stablastim grafovima bez petlji, kakve mi isključivo proučavamo, ova tvrdnja ekvivalentna je tvrdnji da: u mrežama s neparnim brojem elementarnih šetnji u modovima postoji isključivo paran broj čvorova prevaljenih u svakom modu, odnosno da: u mrežama s parnim brojem elementarnih šetnji u modovima postoji isključivo neparan broj čvorova prevaljenih u svakom modu. Kada se usredotočimo na modove određenoga reda, vrijedi da u svakoj mreži broj prevaljenih čvorova biva točno za 1 veći od broja tranzicija.

Sve su ovo činjenice koje su toliko očigledne, da dokaz gotovo i nije potreban, a posebno ne za praktične svrhe. Stoga nećemo inzistirati na rigoroznom dokazivanju, nego ćemo ga načiniti za naše konkretne slučajeve, bez suvišnog formalizma. Takav se dokaz induktivno širi na sve druge mreže s istim topološkim osobinama, no s tim se formalizmom opet nećemo baviti. Intuitivno je posve jasno o čemu se radi. Ako osnovni mod sadrži  $n$  tranzicija, modovi prvog reda nastaju tako da signal načini jedan izlet od takvoga puta, i jedan povratak na isto mjesto, pa imamo  $n+2$  tranzicije. Modovi drugoga reda nastaju na isti način u odnosu na modove prvoga reda, itd. Te činjenice, koje su lako vidljive samim promatranjem grafa, slijede iz njegove posebne topologije. Dodavanjem bilo kojeg brida između čvorova koji već nisu spojeni u ovakvome grafu, uočeno pravilo u općem slučaju pada u vodu. Nama dokaz ovako na prvi pogled jasnoga pravila nije važan zbog samoga sebe, nego zato što će se prilikom njegova izvođenja prirodno nametnuti jedno ograničenje odabira čvorova u procesu raspirivanja modova, koje će nam olakšati prebrojavanje svih modova određenog reda i polariteta, a to je važno zbog određivanja amplituda impulsa u impulsnom odzivu promatrane mreže.

Započet ćemo analizom mreže, prema slici 5. Topološka svojstva grafa nalazimo popisana u tablici mogućih tranzicija iz prethodnog odjeljka, a dodatni uvjet je da je početna točka A, a završna B. To evidentno znači da je početna tranzicija za svaki mod predstavljena nizom  $A - 1 - \dots$ , dok je zaključna tranzicija za svaki mod predstavljena nizom  $\dots - 2 - B$ . Dakle, svaki mod ima opći oblik:  $A - 1 - \dots - X - X - \dots - X - X - \dots - 2 - B$ . Krenimo sada slijeva, služeći se našom tablicom. Nakon čvora 1, moguće su samo tranzicije prema čvorovima: A, 2 ili 11. Nakon dostizanja tih čvorova, mogući su nadalje samo prelasci prema: 1, 21, B, 111 ili 112. Nakon ovih moguće je krenuti samo prema: 2, 11, A, 211 ili 212. Nakon tih ponovno je moguće krenuti samo prema: 1, 21, B, 111 ili 112. I tako u beskraj. Pogledajmo sada proces zdesna. Prije čvora 2 mogu biti samo sljedeći čvorovi: B, 1 ili 21. No, korak prije njih mogu biti samo: 2, 11, A, 211 ili

212. Ali, prije tih mogu biti samo neki od ovih: 1, 21, B, 111 ili 112. Prije njih pak dolaze u obzir jedino neki od sljedećih: 2, 11, A, 211 ili 212. I tako redom... Čitatelj će lako ove navode provjeriti u tablici ili na grafu. Zapažanja ćemo sistematizirati nabrojanjem sljedećih karakterističnih skupova čvorova:

$$\Theta = \{11, 2, A\}$$

$$\Phi = \{11, 2, A, 211, 212\}$$

$$\Xi = \{21, 1, B\}$$

$$\Psi = \{21, 1, B, 111, 112\}.$$

Važno je uočiti sljedeće relacije:  $\Theta \subset \Phi$ ,  $\Xi \subset \Psi$ ,  $\Theta \cap \Xi = \emptyset$ ,  $\Theta \cap \Psi = \Phi \cap \Xi = \Phi \cap \Psi = \emptyset$ ;  $\Phi \cup \Psi = \Omega$ . Ovdje je  $\Omega$  skup svih čvorova mreže. Dakle, prva dva skupa su međusobno disjunktna sa druga dva, u bilo kojoj kombinaciji. Proces traženja modova razgranavanjem svih mogućih tranzicija u verižnom dijagramu teče tako da se u svakom koraku mogu birati elementi iz točno određenih skupova. Krenemo li od točke A, taj slijed skupova je:

$A - 1 - \Theta - \Psi - \Phi - \Psi - \Phi - \Psi - \dots$  Nazovimo to "lijevim procesom". No, od svih mogućih kombinacija vrijedit će samo one koje mogu završiti u  $\dots - 2 - B$ . Da bi to bilo ostvarivo, "desni proces" evidentno mora teći ovako:  $\dots - \Phi - \Psi - \Phi - \Psi - \Phi - \Xi - 2 - B$ . S obzirom da početni čvor mora biti A, a završni mora biti B, ispravan proces bit će presjek lijevoga i desnoga, u svakom koraku. Međutim, s obzirom na disjunktност skupova  $\Theta$  i  $\Phi$  u odnosu na  $\Xi$  i  $\Psi$ , to će biti moguće samo ako je broj čvorova od početka do kraja paran, a ako je neparan, presjek lijevog i desnog procesa u svim će koracima biti prazan skup. Napišimo ove procese jedog ispod drugog za te dvije mogućnosti, gdje će se točno vidjeti o čemu se radi:

$$\begin{array}{l} A - 1 - \Theta - \Psi - \Phi - \Psi - \Phi - \Psi - \dots \\ \dots - \Phi - \Psi - \Phi - \Psi - \Phi - \Xi - 2 - B \end{array} \quad \text{prvi slučaj}$$

$$\begin{array}{l} A - 1 - \Theta - \Psi - \Phi - \Psi - \Phi - \Psi - \dots \\ \dots - \Phi - \Psi - \Phi - \Psi - \Phi - \Xi - 2 - B \end{array} \quad \text{drugi slučaj}$$

U prvom slučaju presjek gornjeg i donjeg reda je neprazan skup u svakom koraku, i on daje moguće rješenje, koje očitog glasi:  $A - 1 - \Theta - \Psi - \Phi - \Xi - 2 - B$ . Naravno, u sredini, između  $\Psi$  i  $\Phi$ , može biti bilo koliko alterniranih skupova  $\Psi$  i  $\Phi$ , tako da nigdje u lancu ne budu dva ista skupa susjedna u susjednim koracima procesa. Uočimo još i da su čvorovi A i 2 podskupi od  $\Phi$ , dok su čvorovi 1 i B podskupi od  $\Psi$ , tako da je čitava shema u redu. U drugom slučaju, presjek skupova iz gornjeg i donjeg retka uvijek je prazan skup, pa je nemoguće ostvarivanje moda s neparnim brojem čvorova. Time je dokaz za shemu na slici 5 zapravo završen.

### 3.6. Pojam moda i supermoda određenog reda

Najvažnija informacija, koju prenosimo iz prošloga odjeljka u sljedeće, jest ta da se tranzicije događaju u konzekventnim koracima među disjunktним skupovima čvorova, te da u razvijenom procesu, nakon nekoliko prvih koraka, čvorovi

bivaju birani iz istoga skupa točno u svakom drugom koraku (engl. “leap-frog” algoritam). To ćemo svojstvo upotrijebiti kako bismo dizajnirali jednostavan postupak za prebrojavanje modova određenog reda, bez njihova eksplicitnog traženja. Nadamo se da ćemo na taj način moći prebrojiti sve modove koji na određite stizu u isto vrijeme, te ih sve zbrojiti na odgovarajući način, kako bi se dobila barem približno ispravna amplituda odjeka traženog reda. Promatrajući za početak jednostavnu situaciju, kada su sve grane u našoj mreži električki jednako duge, pojavit će se daljnji problem zbog toga što će zbog višestrukih refleksija na čvorovima klase  $P$  neki modovi stizati s jednim, a neki s drugim polaritetom. Nadamo se također da ćemo na jednostavan način moći pobrojiti udio jednih i drugih u ukupnom broju.

Prije daljnjih razmatranja razlučit ćemo dva pojma: mod i supermod. Pojam moda izvjesnog reda već smo ranije naveli: to je svaki mogući put između polazišta i određita koji se ostvaruje s točno određenim brojem tranzicija, uz dopušteno ponavljanje, po pravilima ustanovljenim topologijom mreže, odnosno tablicom mogućih tranzicija.

Supermod je suma svih modova koji imaju jednako vrijeme propagacije. Supermod je ono što bismo, ustvari, izmjerili na izlazu mreže, u točki B, u određenom trenutku, koji nastupa protekom vremena propagacije modova koji čine supermod od trenutka odašiljanja impulsa na ulazu A.

### 3.7. Prebrojavanje svih modova određenoga reda

Prva ideja o prebrojavanju svih modova nekoga reda izvire iz osnovnih pravila kombinatornog prebrojavanja [13]. Pogledamo li što je ustvari mod  $n$  – tog reda, vidjet ćemo da je on jednoznačno određen uređenim skupom  $\Lambda$  od  $n + 4$  elementa, koji se svi biraju iz skupa  $\Omega$ , a taj sadrži sve moguće čvorove iz naše mreže. Na prvi pogled, moglo bi se učiniti da se radi o određivanju broja kombinacija s ponavljanjem. No, to nije tako, jer se na odabir propisuju dosta složeni dodatni uvjeti, pa je potrebno krenuti drugim putem.

Za mrežu prema slici 5, dodatni uvjeti su sljedeći: prva dva elementa u modu su uvijek A, 1; posljednja dva su uvijek 2, B; a  $(k+1)$ -i element skupa  $\Lambda$  bira se samo između onih koji mogu zbgiti nakon  $k$ -tog elementa, u skladu s tablicom mogućih tranzicija. Maločas smo dokazali da se u konzekventnim koracima elementi biraju iz strogo disjunktne skupova. To je vrlo važno svojstvo, koje će nam omogućiti relativno jednostavno prebrojavanje modova.

Da bismo iz tih propozicija efikasno prebrojili modove  $n$  – tog reda, ovdje u konfiguraciji prema slici 5, poslužiti ćemo se grafičkim prikazom prvih nekoliko koraka u procesu raspirivanja modova, danim na slici 6. Vidjet ćemo da se ovaj postupak može primijeniti u bilo kojoj situaciji. Na dijagramu se može uočiti disjunktne skupove čvorova u susjednim koracima procesa. Dijagram je načinjen tako da se, nakon obveznog početnog stanja A – 1 ..., otcjepljuju tri grane, prema svakom od čvorova koji može biti dosegnut

iz čvora 1, a u skladu s tablicom mogućih tranzicija. Ta tri čvora, naime 2, 11 i A, ponovno se u sljedećem koraku, razgranjuju u skladu s tablicom, i tako redom, u nedogled... Nacrtali smo onoliko prvih koraka, koliko je bilo zgodno prikazati na jednom listu papira. Najniži mod 0. reda dostiže se nakon tri tranzicije. Općenito, svaka oznaka čvora B znači da tu završava mod. Na našoj slici, svi čvorovi koji prikazuju definitivno početno i krajnje stanje označeni su podebljanim slovom i sivom pozadinom.

Pravilo gibanja po ovom verižnom dijagramu je jednostavno: dozvoljeno je gibanje od točke A na početku dijagrama isključivo nadesno. Na slici vidimo šest boldiranih znakova B: jedan predstavlja završetak puta impulsa koji propagira modom 0. reda (na slici slijedimo putanju A – 1 – 2 – B), a ostalih pet predstavljaju sve modove 1. reda, nabrojene malo ranije u ovom poglavlju.

Nama su vrlo zanimljivi osjenčani čvorovi u zadnjem skiciranom koraku, uključivši i boldirane oznake B. Zbog čega su oni istaknuti u odnosu na ostale? Verižni dijagram prikazuje sve moguće tranzicije, prema pravilima tablice mogućih tranzicija, ali samo u *lijevom procesu*. No, daljnja tranzicija prema obveznom predzadnjem čvoru, 2, moguća je samo iz osjenčanih čvorova, dok iz ostalih nije moguća. Dakle, broj osjenčanih čvorova u koraku u kojemu završavaju staze modova  $n$ -tog reda jednak je upravo broju modova  $(n+1)$ -og reda. Primijetimo da osjenčani čvorovi, 1, 21 i B, čine skup  $\Xi$ . Svi zajedno čvorovi u tome koraku pripadaju skupu  $\Psi$ . Time smo uvažili uvjet koegzistencije lijevog i desnog procesa. Shema se iteracijom nastavlja i dalje, što ovdje ne možemo nacrtati, ali na temelju uočenoga svojstva možemo izvesti prikladnu relaciju, i tako pobrojiti točno sve modove, ne traživši ih pritom pojedinačno. Naravno, potpuno je legalan i pristup primjenom “brutalne računarske sile”, naprosto pretraživanjem sheme i prebrojavanjem modova. No, on može postati nepraktičan za modove malo višeg reda.

Pojasnimo: dijagram se dalje lavinski razvija korištenjem svih 35 stanja u zadnjem nacrtanom koraku, pa i onih neosjenčanih, jer i ta stanja nakon više dvokoraka mogu dati ispravne modove. To se lijepo vidi na slici. No, u svakom koraku ćemo separirati one čvorove koji se u sljedećem koraku mogu zatvoriti u čvor 2, pa onda potom i u B. Ipak, prisutnost čvora B u nekom koraku dijagrama ne znači da tu račun staje, što se njega tiče. Nadesno od njega opet obavljamo isti postupak, jer se i u stvarnosti refleksije zamišljenih Diracovih impulsa od njega nastavljaju teoretski nebrojeno puta, ako on nije prilagođen na valnu impedanciju linije. To se vidi na slici 6, u koraku koji je označen sa “0. red”. Slika 7. zgodniji je prikaz tablice mogućih tranzicija, složen tako da predočava sve moguće tranzicije u dvokoraku, iz skupa čvorova  $\Psi$ . Uočimo da su ciljni čvorovi također svi isključivo iz toga skupa. Ta će nam slika pomoći u prebrojavanju.

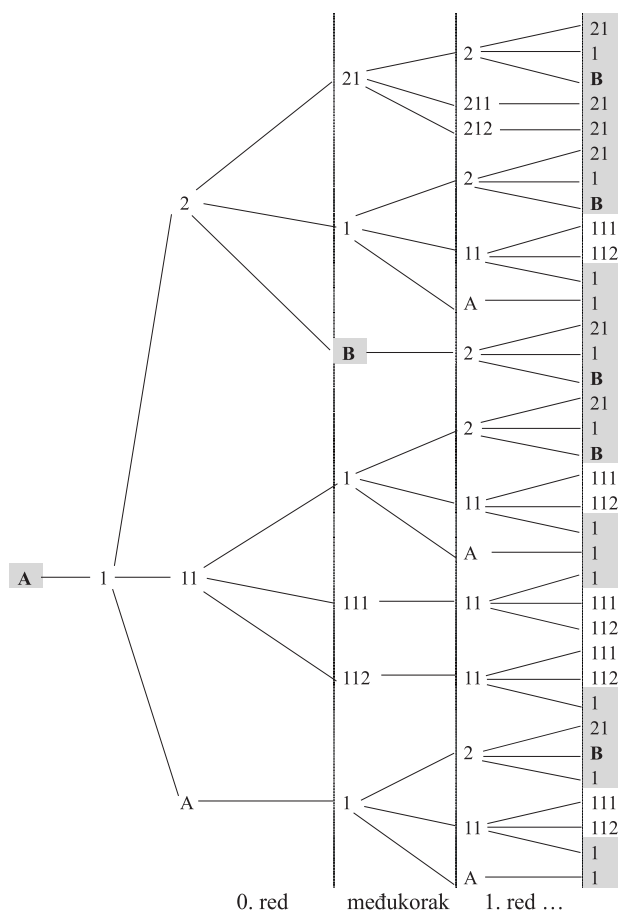
Započnimo promatranjem slike 6. Prvi koraci su trivijalni za prebrojavanje. Postoji samo jedan mod 0. reda, i 5 modova 1. reda, koji se direktno vide kao staze u dijagramu zaključene sa B. U desnom stupcu dijagrama postoji 25,



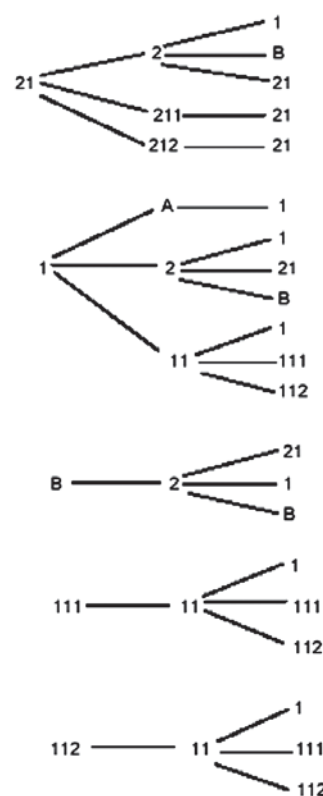
od ukupno 35, stanja kojima je jedna od opcija da nakon još dva koraka završe u ... – 2 – B. Ne postoje druge staze sa istim svojstvom. Dakle, modova 2. reda ima točno 25. Pogledajmo sada dva dvokoraka dalje: od 35 stanja na kraju našeg dijagrama, prebrojimo koliko ima svakih od pet mogućih: 21 se pojavljuje 7 puta; 1 se pojavljuje 13 puta; B se pojavljuje 5 puta; 111 se pojavljuje 5 puta; i 112 se pojavljuje 5 puta. No, mi znamo koliko ti čvorovi nakon sljedećeg dvokoraka mogu iznjedriti stanja koja pripadaju skupu Ξ, odnosno koja pripadaju skupu Ψ. To imamo popisano u objašnjenju ispod slike 7. Stoga tvrdimo da će broj modova sljedećeg, dakle 3. reda biti:  $7 \times 5 + 13 \times 5 + 5 \times 3 + 5 \times 1 + 5 \times 1 = 125$ . Doista, modova 3. reda ima točno 125. Toliko stanja pripada skupu Ξ. Ukupan broj stanja, koja su sva iz Ψ, iznosi istom logikom:  $7 \times 5 + 13 \times 7 + 5 \times 3 + 5 \times 3 + 5 \times 3 = 171$ .

Da bismo krenuli korak dalje, moramo ustanoviti koliko je kojih od tih 171 stanja. Evo računa:

- Broj stanja 21 =  $3 \times 7 + 1 \times 13 + 1 \times 5 + 0 \times 5 + 0 \times 5 = 39$ .
- Broj stanja 1 =  $1 \times 7 + 3 \times 13 + 1 \times 5 + 1 \times 5 + 1 \times 5 = 61$ .
- Broj stanja B =  $1 \times 7 + 1 \times 13 + 1 \times 5 + 0 \times 5 + 0 \times 5 = 25$ .
- Broj stanja 111 =  $0 \times 7 + 1 \times 13 + 0 \times 5 + 1 \times 5 + 1 \times 5 = 23$ .
- Broj stanja 112 =  $0 \times 7 + 1 \times 13 + 0 \times 5 + 1 \times 5 + 1 \times 5 = 23$ .
- UKUPNO = 171.



Slika 6. Uz prebrojavanje modova za shemu sa slike 5.



Slika 7. Pravila kretanja u mreži po slici 5, u dva koraka. Skup Ψ preslikava se sam u sebe. Ove sheme se izvode iz tablice mogućih tranzicija. Uočimo da polazni čvorovi nakon dva koraka daju ovakve čvorove, glede članstva u skupu Ξ:

- čvor 21 5 odgovarajućih
- čvor 1 5 odgovarajućih i 2 neodgovarajuća
- čvor B 3 odgovarajuća
- čvor 111 1 odgovarajući i 2 neodgovarajuća
- čvor 112 1 odgovarajući i 2 neodgovarajuća

Kada to znamo, možemo izračunati broj modova 4. reda. Ponovno se koristimo slikom 7. Broj stanja koja su elementi skupa Ξ bit će:  $39 \times 5 + 61 \times 5 + 25 \times 3 + 23 \times 1 + 23 \times 1 = 621$ . Dakle, modova 4. reda ima ni manje ni više nego 621. Ukupan broj stanja pripadnih skupu Ψ, s kojima dalje nastavljamo izračun, jednak je:  $39 \times 5 + 61 \times 7 + 25 \times 3 + 23 \times 3 + 23 \times 3 = 835$ . I tako proces teče dalje ... U tabeli 3 dajemo izračunate vrijednosti za modove do zaključno 10. reda.

Sada možemo sistematizirati algoritam prebrojavanja modova. U označavanju ćemo koristiti indekse  $k$  i  $l$ , koji se biraju iz elemenata skupa Ψ, tako da npr.  $q_{k,l}$  može značiti  $q_{21,B}$  ili  $q_{111,1}$ , i slično. Skupove Ψ i Ξ držat ćemo zbog jedinstvenosti indeksacije uređenima, dakle uvijek sa istim poretkom elemenata:  $\Psi = \{21, 1, B, 111, 112\}$ ;  $\Xi = \{21, 1, B\}$ . Taj se odabir očito odnosi na shemu sa slike 5, ali se postupak može provesti za bilo kakvu strukturu. Tamo gdje će indeks označavati redni broj iz skupa prirodnih brojeva s nulom,  $\mathbb{N}^0$ , koristit ćemo klasičnu oznaku,  $i$ . Najprije ćemo definirati vektore koji u čitavom algoritmu ostaju nepromijenjeni.

Tablica 3. Razvoj modova do uključivo 10. reda za mrežu sa slike 5.

Red moda	Broj stanja iz skupa $\Xi$ dva koraka ranije = broj modova	Broj stanja iz skupa $\Psi$ , dva koraka ranije
0.	1	1
1.	5	7
2.	25	35
3.	125	171
4.	621	835
5.	3,069	4,083
6.	15,117	19,987
7.	74,317	97,907
8.	364,941	479,795
9.	1,790,925	2,351,795
10.	8,785,613	11,529,267

Karakteristične vektore preslikavanja sa skupa  $\Psi$  na  $\Psi$ , odnosno sa  $\Psi$  na  $\Xi$ , označit ćemo sa  $\mathbf{v}_{\Psi\Psi}$ , odnosno  $\mathbf{v}_{\Psi\Xi}$ . Oni imaju isti broj komponenti, koliko skup  $\Psi$  ima članova. To su vodoravni vektori, čiji elementi znače sljedeće:

- Element  $(\mathbf{v}_{\Psi\Psi})_k$  pokazuje koliko stanja koja pripadaju skupu  $\Psi$  nastaje od polaznog stanja  $k \in \Psi$ , nakon dva koraka u procesu definiranom tablicom mogućih tranzicija.

- Element  $(\mathbf{v}_{\Psi\Xi})_k$  pokazuje koliko stanja koja pripadaju skupu  $\Xi$  nastaje od polaznog stanja  $k \in \Psi$ , nakon dva koraka u procesu definiranom tablicom mogućih tranzicija.

Te se vrijednosti očitavaju direktno sa slike 7. U našem slučaju karakteristični vektori koji opisuju proces tranzitiranja u dvokoraku iznose:  $\mathbf{v}_{\Psi\Psi} = [5, 7, 3, 3, 3]$ ;  $\mathbf{v}_{\Psi\Xi} = [5, 5, 3, 1, 1]$ .

Sljedeći karakteristični objekt je karakteristična matrica tranzitiranja u dvokoraku,  $\mathbf{Q}$ . Ona je specifična za svaku pojedinu tablicu mogućih tranzicija, što znači i za svaku pojedinu mrežu, pa je možemo smatrati izričajem topoloških svojstava mreže. Element na poziciji  $(k,l)$ ;  $k, l \in \Psi$ ; označuje koliko se stanja  $l$  ukupno razvija iz početnog stanja  $k$  u jednom dvokoraku. Matrica je kvadratna, a ima onoliko redova i stupaca koliko elemenata ima u skupu  $\Psi$ . Vrijednosti elemenata matrice također se za naš slučaj mogu jednostavno očitati sa slike 7.:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

U općem slučaju njihovo pronalaženje također ne predstavlja problem. Nadalje, definirat ćemo stupčasti populacijski vektor  $\mathbf{p}_i = [(p_i)_l]$ ;  $l \in \Psi$ ,  $i \in \mathbb{N}^0$ . On pokazuje koliko u koraku algoritma indeksiranom sa  $i$  ima stanja  $l$  iz skupa  $\Psi$ . Tako smo već npr. u koraku algoritma koji nastupa za jedan dvokorak prije zaključivanja modova 2. reda (vidjeti sliku 6., oznaka "1. red") pobrojali koliko ima kojih elemenata, te smo utvrdili da se stanje 21 ponavlja

7 puta, 1 se ponavlja 13 puta, B se ponavlja 5 puta, 111 se ponavlja 5 puta, i 112 se također ponavlja 5 puta. Stoga je populacijski vektor u tom koraku jednak:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Korak smo indeksirali sa  $i = 1$  jer u njemu završavaju modovi 1. reda. Pomoću populacijskog vektora  $i$ -tog reda računamo broj modova  $(i+1)$ -og reda kao broj svih elemenata koji su iz  $\Xi$ :

$$N_{i+1} = \mathbf{v}_{\Psi\Xi} \cdot \mathbf{p}_i. \quad (8)$$

Ukupan broj stanja u  $(i+1)$ -om koraku jednak je broju svih elemenata koji su iz  $\Psi$ :

$$M_{i+1} = \mathbf{v}_{\Psi\Psi} \cdot \mathbf{p}_i. \quad (9)$$

Populacijski vektor u sljedećem,  $(i+1)$ -om koraku procesa, dobije se kao:

$$\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{p}_i. \quad (10)$$

Rezultat množenja je opet stupčasti vektor. Time smo u potpunosti definirali relaciju za prebrojavanje ukupnog broja modova bilo kojeg reda. No, iz (3) možemo izvesti analitički izraz za ukupan broj svih modova nekoga reda, jer je očito  $\mathbf{p}_{i+2} = \mathbf{Q} \mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{Q} (\mathbf{Q} \mathbf{p}_i)$ , i tako dalje. Tako konačno, na temelju jednažbi (1), (2) i (3), za modove proizvoljnog,  $i$ -tog reda možemo napisati općenite formule za prebrojavanje svih modova:

$$\begin{aligned} N_i &= \mathbf{v}_{\Psi\Xi} \cdot \mathbf{Q}^{i-\zeta+2} \cdot \mathbf{p}_\zeta. \\ M_i &= \mathbf{v}_{\Psi\Psi} \cdot \mathbf{Q}^{i-\zeta+2} \cdot \mathbf{p}_\zeta. \end{aligned} \quad (11)$$

$\zeta$  označuje red populacijskog vektora s kojim započinjemo račun. Obvezno mora biti  $i \geq \zeta + 2$ . Ovdje potencija iznad matrice  $\mathbf{Q}$  znači da se ona množi sama sa sobom toliko puta. Kada je  $i = \zeta + 2$ , pojavljuje se  $\mathbf{Q}^0$ . To je jedinična matrica, sa svim elementima glavne dijagonale jednakim 1, a s ostalima jednakim 0. Uvažili smo konvenciju od ranije da se modovi  $i$ -tog reda prebrojavaju pomoću populacijskog vektora  $(i-1)$ -og reda, a da populacijski vektor nosi indeks reda moda koji se zatvara u njemu pripadnoj fazi dijagrama. Vrijedi još jednom naglasiti da ta formula daje *točan* broj modova,  $N_p$ , kao i *točan* broj stanja razvijenih u verižnom dijagramu za jedan dvokorak ranije,  $M_i$ . Evo primjera: ako na početku koristimo malo ranije napisani vektor  $\mathbf{p}_1$ , njegovim množenjem dvaput s matricom  $\mathbf{Q}$  slijeva, pa zatim s karakterističnim vektorom  $\mathbf{v}_{\Psi\Xi}$ , dobivamo broj modova 5. reda, kojih je 3069.

$\mathbf{Q}$  matrica je konstanta koja ne ovisi ni na koji način o fazi algoritma, tj. o broju izvršenih koraka. Tako se s njom može

pomnožiti i rudimentarni populacijski vektor,  $\mathbf{p}$ , iz kojega će se razviti osnovni mod 0. reda. Sa slike 6. vidimo da u stanju koje za jedan dvokorak prethodi fazi dijagrama u kojoj se dostiže osnovni mod (na slici označeno sa “0. red”) postoji samo jedan čvor, naime 1. Prema tomu,  $\mathbf{p}$  na svim mjestima sadrži brojku 0, osim na drugom mjestu, koje pripada čvoru 1. Na tom je mjestu u vektoru broj koji kazuje koliko u toj fazi dijagrama ima čvorova s oznakom 1. On je jedan jedini. Iz toga bi trebao slijediti populacijski vektor  $\mathbf{p}_0$ , kao:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Doista, na slici 5., u fazi obilježenoj oznakom “0. red” možemo pronaći ukupno jedan čvor 21, tri čvora 1, te po jedan od čvorova B, 111 i 112. Analogno konstruiramo i sljedeće populacijske vektore, pa nekolicina prvih glasi:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 39 \\ 61 \\ 25 \\ 23 \\ 23 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_3 = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 203 \\ 293 \\ 125 \\ 107 \\ 107 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_4 = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1027 \\ 1421 \\ 621 \\ 507 \\ 507 \end{bmatrix} \quad \text{itd...}$$

Primijetimo da treći redak  $i$ -tog populacijskog vektora sadrži uvijek točan broj modova  $i$ -tog reda, jer treće mjesto pripada čvoru B, koji je jedini mogući završni čvor. Naravno, taj broj je točno jednak sumi prve tri komponente populacijskog vektora iz prethodnog koraka, jer one prezentiraju brojnost stanja iz skupa  $\Xi$ .

Izloženi postupak ne ovisi o konkretnom primjeru, kojega smo ovdje koristili radi bolje preglednosti. Možemo ići toliko daleko da obuhvatimo čitavu klasu mreža kojoj pripada i naš primjer, te ustvrditi da:

za svaku stablastu mrežu u kojoj su pravila kretanja od čvora do čvora jednoznačno utvrđena tablicom mogućih tranzicija tako da je kretanje moguće isključivo između susjednih čvorova grafa u oba smjera, te u kojoj je točno propisano koji je jedini mogući početni, a koji jedini mogući završni čvor u izvođenju bilo kojeg kretanja s bilo kojim mogućim brojem koraka,

sigurno postoji rudimentarni populacijski vektor  $\mathbf{p}$ , ili barem neki,  $\mathbf{p}_c$ , razvijen nakon konačnog broja dvokoraka; sigurno postoji samo jedna konstantna matrica  $\mathbf{Q}$ , i sigurno postoje konstantni vektori  $\mathbf{v}_{\Psi}$  i  $\mathbf{v}_{\Xi}$ , tako da se svi modovi  $i$ -tog reda razvijeni u takvoj mreži mogu točno pobrojiti po formuli (4).

### 3.8. Prebrojavanje svih modova određenoga reda prema polaritetu

Ovisno o klasama čvorova u promatranoj mreži, na ponekima od njih, koji pripadaju klasi  $\mathcal{P}$ , događaju se refleksije s okretanjem polariteta zamišljenih Diracovih impulsa. Modovi koji sadrže neparan broj refleksija na takvim čvorovima imat će negativan polaritet. Pozitivnim polaritetom smatramo polaritet moda nultog reda. Za početak, koncentrirajmo se na mrežu u kojoj su svi odsječci linija između čvorova jednako dugi. Tada će svi modovi određenoga reda stizati u isto vrijeme, a niti jedan mod nekoga drugog reda neće stizati u to vrijeme. Prema tome, svi modovi jednoga reda činit će odgovarajući supermod. Ono što je nama zapravo važno je amplituda impulsa supermoda, dobivena zbrojem svih amplituda modova nekog reda. Stoga je presudno važno koliko modova istoga reda pristiže s pozitivnim, a koliko s negativnim polaritetom. Kada bi taj broj npr. bio podjednak, dotični supermod bi bio izuzetno prigušen. U ovome odjeljku izvest ćemo formalizam za prebrojavanje modova po polaritetu. Zbog jasnoće izlaganja sve ćemo i dalje promatrati na našem primjeru mreže prema slici 5., s generalizacijom razmatranja koja će omogućiti prebrojavanje modova prema polaritetu u bilo kakvoj stablastoj mreži koja se može jednoznačno definirati tablicom mogućih tranzicija, tako da je kretanje dozvoljeno između susjednih vrhova grafa poveznim bridovima u bilo kojem smjeru s bilo kojim brojem ponavljanja, s tim da je uvijek poznata jedna određena polazna i jedna određena završna točka kretanja.

Koristit ćemo u osnovi istu strategiju prebrojavanja kao i maločas, kada smo brojili sve modove izvjesnoga reda  $i$ . Da bismo to proveli, morat ćemo ekspanirati populacijske vektore i matricu preslikavanja stanja prigodom prolaska kroz jedan dvokorak. Ranije smo u populacijskim vektorima imali pet komponenti, za svakog člana skupa  $\Psi$  po jednu. To smo mogli učiniti jer su u procesu prebrojavanja sve točke iz toga skupa bile jednako vrijedne, a svaka je bila dostatno opisana u svakom koraku procesa samim svojim imenom. Ovdje ćemo pak vidjeti da će broj komponenti populacijskog vektora narasti u našem primjeru sa 5 na najmanje 14, a dimenzija  $\mathbf{Q}$  matrice postat će  $14 \times 14$  ili veća. Prva nam je zadaća objasniti zašto dolazi do cijepanja svakog stanja na najmanje dva različita.

Problem kod prebrojavanja modova istog predznaka je u tome što se predznak može i ne mora promijeniti prilikom prelaska iz jednoga stanja u prvo sljedeće, koje nastupa za

jedan dvokorak kasnije. Iz jednoga stanja razvija se njih nekoliko, prema tablici mogućih tranzicija, odnosno prema slici 7. Ta stanja ne moraju imati isti predznak kao i ono iz kojega su se razvila. Do promjene predznaka dolazi zbog refleksije na čvorovima klase  $P$ , ili pak na terminalnim čvorovima koji su zaključeni niskom impedancijom u odnosu na valnu impedanciju pripadajuće linije. Najprije moramo identificirati koji su to čvorovi. U našoj mreži, prema slici 5, to su čvorovi 1 i 2. Nadalje, još ćemo uzeti da je čvor A negativno refleksivan. To bi bio slučaj kada bi u njemu stajao priključen izvor signala s niskom unutarnjom impedancijom (naponski izvor). Svi ostali čvorovi neka u ovom primjeru budu pozitivno refleksivni. Treba primijetiti da je izbor pozitivne ili negativne refleksivnosti čvorova posve neovisan o topologiji grafa. On ovisi o fizikalnim prilikama u čvorovima, koje dodatno čine razliku između njih tako što im daju još neka svojstva.

Koja svojstva su nama važna za prebrojavanje modova po polaritetu, vidjet ćemo ako pokušamo definirati rekurzivnu shemu preslikavanja iz skupa stanja jednoga reda u skup stanja prvog sljedećeg višeg reda. Pogledajmo najprije kako to funkcionira kada je u početnoj točki dvokoraka pozitivno refleksivan čvor, npr. 21. Na slici 7. lako ćemo vidjeti da nakon jednoga dvokoraka to stanje prelazi u jedno od sljedećih: 1, B, 21, 21, 21. Pri tom će se ciljnom stanju 21 do kojega se došlo tranzicijom preko čvora 2, dakle  $21 - 2 = 21$ , promijeniti predznak, jer se očito dogodila refleksija u negativno refleksivnom čvoru 2. No, time smo saznali samo da će jedno određeno stanje imati obratan predznak od prijašnjeg stanja iz kojega je nastalo. Da bismo znali točan predznak, moramo poznavati polaritet početnog stanja dvokoraka, 21. Relevantnu informaciju o stanju sada više ne čini samo ime čvora, u ovom slučaju 21, nego i njegov ranije već dostignuti predznak. Dakle, čvor 21 može biti karakteriziran dvama različitim stanjima, koja ćemo označiti sa  $21+$  i  $21-$ . Isto vrijedi i za sve druge pozitivno refleksivne čvorove, koji se nalaze u ishodištima tranzicijskih shema za dvokorak, prema slici 7. To su sveukupno čvorovi: 21, B, 111 i 112. Svaki od njih daje dva stanja: jedno pozitivno i jedno negativno. Korištenjem sheme tranzitiranja, sva stanja nakon dvokoraka dobivaju točno poznat asociirani čvor i dostignuti predznak.

Dodatan problem javlja se kada je u ishodištu dvokoračne tranzicijske sheme čvor s negativnom refleksivnošću. Na našoj slici to je čvor 1. On se mora raspasti čak na 6 stanja, kako bi se traženo prebrojavanje moglo točno obaviti. Naime, problem je što se u dvokoračnoj shemi ne vidi eventualna refleksija na ishodišnom elementu, ako se ne vidi prethodno stanje, koje postoji za jedan korak (tj. pola dvokoraka) ispred njega. Kada je ishodišni element pozitivno refleksivan, to nije važno, jer ne dolazi do promjene polariteta. No, kada je on negativno refleksivan, na njemu može i ne mora doći do refleksije. Refleksiju na nekom čvoru prepoznajemo po tome što se lijevo i desno od njega nalazi oznaka istoga čvora. S obzirom da prema tablici mogućih tranzicija signal iz našega čvora 1 može

otići prema A, 2 i 11, to će se i početni element 1 dvokoračne sheme sa slike 7. raspasti na tri stanja: ono kada mu prethodi A, ono kada mu prethodi 2, i ono kada mu prethodi 11. Ta ćemo stanja označiti sa  $(A-1)$ ,  $(2-1)$  i  $(11-1)$ . Svakome od tih stanja mora se dodatno pripisati postignuti predznak, tako da čvor 1 generira 6 različitih mogućih stanja. Na taj način, baza za populacijske vektore više neće biti skup  $\Psi$  sa pet članova, nego skup  $\Psi'$  sa 14 članova:

$$\Psi' = \{21+, (A-1)+, (2-1)+, (11-1)+, B+, 111+, 112+, 21-, (A-1)-, (2-1)-, (11-1)-, B-, 111-, 112-\}.$$

Nije teško izvesti rekurzivnu relaciju koja opisuje preslikavanje iz tih elemenata kroz jedan dvokorak. Ona će se opredmetiti u obliku matrice  $Q'$ , čiji element na poziciji  $(k,l)$  definira koliko stanja  $l$  nastaje u jednom dvokoraku iz stanja  $k$ ;  $k, l \in \Psi'$ . Množenjem te matrice s populacijskim vektorom nekoga reda s desne strane, dobit će se populacijski vektor prvog sljedećeg reda, i tako dalje. Preduvjet za funkcioniranje procesa prebrojavanja je točno poznavanje jednog populacijskog vektora bilo kojeg reda, od kojega postupak kreće prema višim redovima. Dakle, dovoljno je i poznavanje populacijskog vektora u nekom od najnižih redova procesa, čije se komponente dobivaju na trivijalan način, prebrojavanjem kroz dijagram sa slike 6.  $Q'$  matrica ispisuje se direktno inspekcijom tranzicijskih shema dvokoraka sa slike 7. U našem slučaju ona glasi:

$$Q' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrica više nije dijagonalno simetrična, ali joj je determinanta jednaka nuli, s obzirom da u njoj postoje međusobno jednaki redovi.  $Q'$  se sastoji od 4 podmatrice dimenzija  $7 \times 7$ , a dvije po dvije dijagonalne od tih četiri su međusobno jednake. To je naznačeno isprekidanim linijama.

Sada ćemo sa slike 6. očitati jedan populacijski vektor niskoga ranga. Pogledajmo npr. rudimentarni vektor,  $\mathbf{p}$ , koji sadrži samo jedno stanje  $(A-1)+$ . Zbog tipografskih razloga napisat ćemo transponirani vektor, kako bismo ga mogli prikazati u retku, umjesto u stupcu. Uredaj mjesta



u vektoru korespondira s poretkom elemenata u gore napisanom skupu  $\Psi'$ .

$$\mathbf{p}'^{(transp.)} = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Pomnoživši taj vektor matricom  $\mathbf{Q}'$  s njegove lijeve strane, dobivamo populacijski vektor 0. reda:

$$\mathbf{p}_0'^{(transp.)} = [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Inspekcijom slike 6. lako ćemo se uvjeriti da je to ispravno određena populacija stanja 0. reda. Proces jednako tako teče i dalje, pa općenito vrijedi:

$$\mathbf{p}'_{i+1} = \mathbf{Q}' \cdot \mathbf{p}'_i. \tag{12}$$

Populacijski vektor  $i$  – tog reda može se zato dobiti izravno iz rudimentarnog vektora kao:

$$\mathbf{p}'_i = \mathbf{Q}'^{i+1} \cdot \mathbf{p}'_0. \tag{13}$$

Broj modova  $i$  – tog reda koji imaju negativan predznak, kao i broj onih koji imaju pozitivan, očitava se jednostavno iz populacijskog vektora  $i$  – tog reda:

$$\begin{aligned} N_i^- &= (p'_{B-})_i \\ N_i^+ &= (p'_{B+})_i \end{aligned} \tag{14}$$

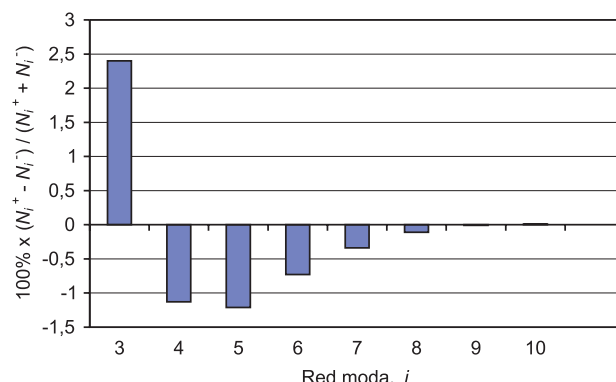
U gornjoj formuli razumije se da je populacijski vektor složen od komponenti označenih kao:  $\mathbf{p}'_i = [(p)_i]$ ;  $i \in \Psi'$ . Prema tome, brojnost modova s negativnim i pozitivnim polaritetom očitava se direktno iz komponenti populacijskog vektora danog reda. Time smo u potpunosti definirali prebrojavanje po polaritetu. Ovakav način vrijedi za sve mreže u klasi koju proučavamo – on dakle nije specifičan za mrežu sa slike 5. U tablici 4. dajemo broj pozitivnih i negativnih modova prvih 10 redova. Jedni i drugi zbrojeni daju, naravno, iznose popisane u tabeli 3.

**Tablica 4.** Pozitivni i negativni modovi u mreži sa slike 5., uz negativno reflektivne čvorove: A, 1 i 2.

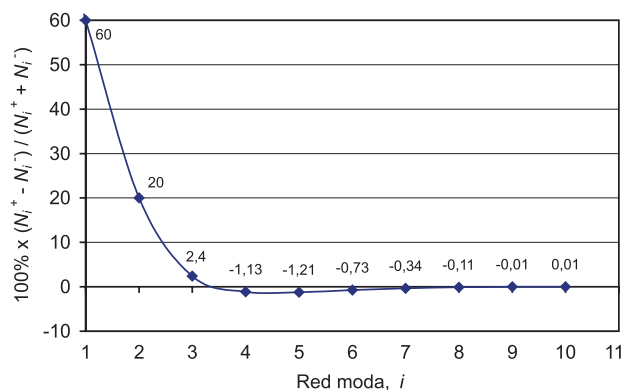
Red moda	Broj modova negativnog polariteta, $N_i^-$	Broj modova pozitivnog polariteta, $N_i^+$
0.	0	1
1.	1	4
2.	10	15
3.	61	64
4.	314	307
5.	1,553	1,516
6.	7,614	7,503
7.	37,285	37,032
8.	182,666	182,275
9.	895,561	895,364
10.	4,392,246	4,393,367

Odmah ćemo se osvrnuti na jednu vrlo važnu numeričku karakteristiku. Promatrat ćemo ovisnost relativnog odstupanja broja pozitivnih i negativnih modova u postocima:  $100\% \times (N_i^+ - N_i^-) / (N_i^+ + N_i^-)$ . Histogram je prikazan na slici 8. Slika 9. i 10. prikazuju istu informaciju u obliku kontinuirane krivulje, koja je mnogo ilustrativnija.

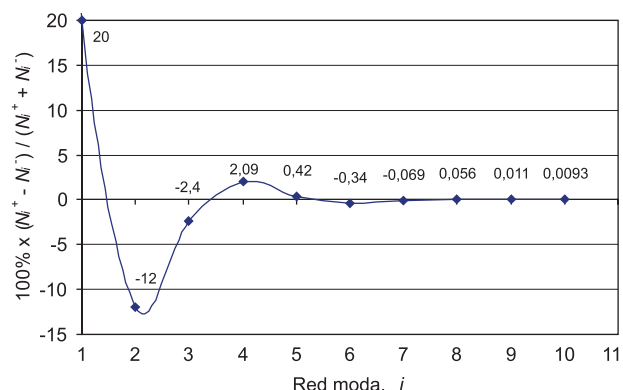
Naravno, vrijednosti na tim slikama treba očitavati samo za cjelobrojne iznose apscise.



**Slika 8.** Relativna razlika broja pozitivnih i negativnih modova u postocima,  $100\% \times (N_i^+ - N_i^-) / (N_i^+ + N_i^-)$ , dana zbog preglednosti samo za modove reda većeg od dva. Kod modova 1. reda ona iznosi +60%, a kod modova drugog reda +20%. Negativno reflektivne točke: A, 1 i 2.



**Slika 9.** Relativna razlika broja pozitivnih i negativnih modova u postocima,  $100\% \times (N_i^+ - N_i^-) / (N_i^+ + N_i^-)$ , prikazana zbog bolje ilustracije tijeka funkcije kontinuiranom krivuljom. Vrijednosti ordinate, napisane na grafikonu, treba očitavati samo za cjelobrojne iznose apscise, u označenim točkama. Negativno reflektivne točke: A, 1 i 2.



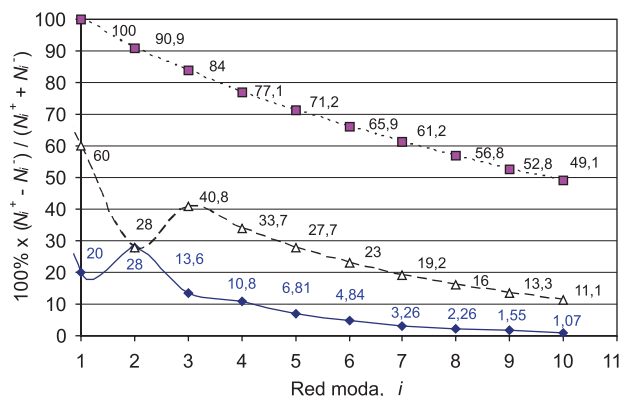
**Slika 10.** Relativna razlika broja pozitivnih i negativnih modova u postocima,  $100\% \times (N_i^+ - N_i^-) / (N_i^+ + N_i^-)$ , prikazana zbog bolje ilustracije tijeka funkcije kontinuiranom krivuljom. U stvarnosti se radi o histogramu, pa vrijednosti ordinate treba očitavati samo za cjelobrojne iznose apscise, u označenim točkama. One su napisane iznad njih. Negativno reflektivne točke: 1, 2, 112 i 212.

Za modove reda 3 i višega ova raspodjela presudno utječe na amplitude supermodova, jer u svakom supermodu postoji toliko veliki broj modova, da možemo reći da su u prvoj aproksimaciji svi oni jednake amplitude, koja korespondira s nekom prosječnom vrijednošću umnoška svih faktora transmisije i refleksije, ma kakva ona bila. O tome malo kasnije. Već za supermodove reda višega od 4 zbog destruktivne interferencije pretežnog broja modova amplituda supermoda biva manja od 1 % od one koja bi bila kada bi većina modova interferirala konstruktivno. Sve u svemu, amplitude supermodova padaju s porastom reda supermoda izuzetno rapidno, mnogo brže nego što bismo mogli očekivati s obzirom da je broj modova u svakom supermodu skoro 5 puta veći nego li u supermodu prethodnog reda.

U nastavku ćemo izraditi sve, a zbog kratkoće prezentirati samo neke, numeričke primjere za različite razmještaje negativno refleksivnih čvorova u mreži prema slici 5. Izračun ćemo reducirati korištenjem svojstva simetrije mreže. Najvažnije svojstvo ove mreže je obvezna negativna refleksivnost čvorova 1 i 2. Kada ona ne bi bila takva, naša mreža ne bi bila instalacijska. Cilj je vidjeti ima li ozbiljnijih odstupanja od pravila koje smo do sada naslutili. Ispustit ćemo pisanje velikih  $Q$  matrica, i dati samo rezultate u grafičkom obliku.

### 3.9. Numerički primjeri prebrojavanja modova po polaritetu

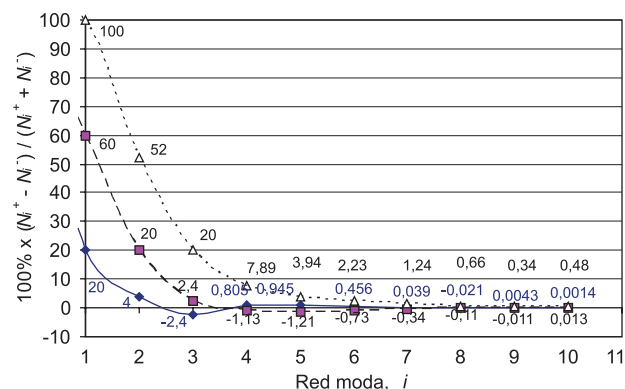
U sljedećem koraku dotaknut ćemo se fizikalno ne-sasvim-realističnog slučaja, kada u promatranoj mreži prema slici 5. imamo samo jedan čvor sa svojstvom negativne refleksivnosti. Slika 11. daje usporedni prikaz relativne razlike broja pozitivnih i negativnih modova za tri slučaja u kojima je samo jedna točka negativno refleksivna. Vidimo da u slučaju kada samo jedan čvor najudaljenije razine pripada klasi  $P$ , modovi pozitivnog polariteta dominiraju i u supermodovima visokoga reda. To znači da je udio destruktivne interferencije modova u formiranju vremenskog odziva razmjerno mali, pa ovakvu mrežu može



**Slika 11.** Relativna razlika broja pozitivnih i negativnih modova za tri zamišljena (fizikalno nerealna) slučaja kada je samo jedan čvor negativno refleksivan: 111 (kvadrat); 11 (trokut); 2 (romb). Čak i tada rezultate brzo konvergiraju ka nuli.

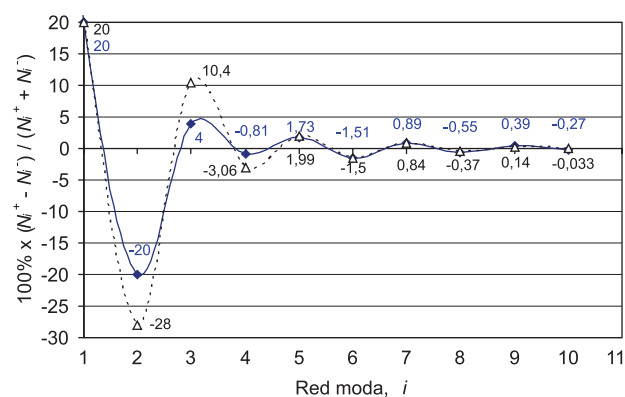
karakterizirati sporo slabljenje amplitude supermodova s porastom njihovoga reda,  $i$ . Kada je negativno refleksivna točka smještena u drugoj razini mreže, uloga destruktivne interferencije je značajno veća, a kada se usamljeni  $P$  čvor nalazi u prvoj razini mreže, na najkraćem putu od A do B, ona već u supermodovima relativno niskog reda ima predominantnu ulogu.

Na slici 12. prikazujemo usporedno situaciju kada su oba čvorova na glavnoj razvodnoj grani, 1 i 2, negativno refleksivni, uz različita stanja refleksivnosti čvorova A i B.



**Slika 12.** Relativna razlika broja pozitivnih i negativnih modova za tri slučaja kada su čvorovi 1 i 2 negativno refleksivni, uz različita stanja u čvorovima A i B. Negativno refleksivni čvorovi su kako slijedi: 1 i 2 (romb); 1, 2 i A (kvadrat); 1, 2, A i B (trokut).

Na slici 13. promotrit ćemo što se događa kada se na samo jednom terminalnom čvoru 3. razine dogodi drastična promjena impedancije. Recimo za primjer da su u čvorovima 111 i 211 spojena snažna, niskoomska trošila, pa su ti čvorovi negativno refleksivni. Uzmimo zatim da je trošilo 111 stalno uključeno pomoću sklopke 112, pa i 112 invertira impuls pri refleksiji. Gledat ćemo razliku u slici interferencije modova u supermodovima, kad je sklopka u čvoru 212 uključena, odnosno isključena.



**Slika 13.** Promjena prilikom uključivanja niskoomskog trošila pomoću jedne od sklopki, dok je drugo niskoomsko trošilo trajno uključeno. Negativno refleksivni čvorovi su: 1, 2, 111, 112, 211, 211 (romb); 1, 2, 111, 112, 211, 212 (trokut). Važne promjene nastaju u supermodovima 2, 3. i 4. reda. Uključivanjem trošila ti supermodovi porastu, a oni visokoga reda brže iščezavaju.

Ostale izrađene primjere nećemo ovdje prikazivati. No, oni također upućuju na iste zaključke, koji se mogu donijeti na temelju prikazanih primjera. U svakom slučaju, porastom reda supermodova, brojnost pozitivnih i negativnih modova u njima vrlo brzo se izjednačuje u relativnom smislu, tako da u svakom slučaju u mreži prevladava destruktivna interferencija.

### 3.10. O amplitudama supermodova

Kada bi svi modovi u nekom supermodu imali jednak apsolutni iznos amplitude, naše razmatranje bismo već sada, na temelju gornjih rezultata, mogli zaključiti tvrdnjom da se *svaka* distribucijska mreža može modelirati propagacijskim modelom koji uzima u obzir samo prvih nekoliko odjeka iz impulsnog odziva, zbog toga što se brojnost pozitivnih i negativnih bodova relativno sve više izjednačava s porastom reda supermoda u bilo kojoj mreži koja ima osnovna topološka svojstva distribucijske, odnosno instalacijske mreže. To bi bio vrlo važan teorijski zaključak, koji ne bi nužno pretpostavljao da je prigušenje supermodova višeg reda veliko zbog većeg prevaljenog

puta, kao što se to argumentira u [6, 7]. Drugim riječima, time bi se dokazalo da bi Dostertov model funkcionirao u svakom slučaju, čak i kada bi gušenja u dielektricima bila vrlo mala, odnosno kada se duljine puteva modova susjednih redova ne bi mnogo razlikovale. No, do takvog zaključka preostao je još jedan velik i važan korak.

Potrebno je, naime, utvrditi amplitude supermodova, koje doduše jesu u korelaciji s relativnom razlikom broja pozitivnih i negativnih modova u supermodu  $i$  – tog reda,  $(N_i^+ - N_i^-) / (N_i^+ + N_i^-)$ , ali nisu direktno razmjerne s tom veličinom. Dapače, moguće je zamisliti situaciju da je npr. ova veličina pozitivna, a da istodobno supermod ima negativnu vrijednost. To je posebno lako moguće u supermodovima niskoga reda, a u svakom slučaju kada je broj pozitivnih i negativnih modova podjednak. Što je  $(N_i^+ - N_i^-) / (N_i^+ + N_i^-)$  po iznosu manji broj, to je ovaj fenomen manje važan. Intuitivno očekujemo da će za visoki red supermoda ukupna njegova amplituda biti određena prosječnim apsolutnim iznosom gušenja modova u tome supermodu, nastalih zbog refleksija i transmisija kroz čvorove, te razlikom broja pozitivnih i negativnih mo-

Tablica 5. Potencije faktora refleksije i transmisije za sve modove 1. reda u mreži prema slici 5. Negativno reflektivni čvorovi su: A, 1 i 2.

MOD	$\rho_A$	$\vartheta_1$	$\rho_1$	$\vartheta_{11}$	$\rho_{11}$	$\rho_{111}$	$\rho_{112}$	$\vartheta_2$	$\rho_2$	$\vartheta_{21}$	$\rho_{21}$	$\rho_{211}$	$\rho_{212}$	$\rho_B$
A-1-2-21-2-B		1						2			1			
A-1-2-1-2-B		1	1					1	1					
A-1-2-B-2-B		1						1	1					1
A-1-11-1-2-B		2			1			1						
A-1-A-1-2-B	1	1	1					1						

Tablica 6. Potencije faktora refleksije i transmisije za sve modove 2. reda u mreži prema slici 5. Negativno reflektivni čvorovi su: A, 1 i 2.

MOD	$\rho_A$	$\vartheta_1$	$\rho_1$	$\vartheta_{11}$	$\rho_{11}$	$\rho_{111}$	$\rho_{112}$	$\vartheta_2$	$\rho_2$	$\vartheta_{21}$	$\rho_{21}$	$\rho_{211}$	$\rho_{212}$	$\rho_B$
A-1-2-21-2-21-2-B		1						2	1		2			
A-1-2-21-2-1-2-B		1	1					3			1			
A-1-2-21-2-B-2-B		1						2	1		1			1
A-1-2-21-211-21-2-B		1						2		2		1		
A-1-2-21-212-21-2-B		1						2		2			1	
A-1-2-1-2-21-2-B		1	1					2	1		1			
A-1-2-1-2-1-2-B		1	2					1	2					
A-1-2-1-2-B-2-B		1	1					1	2					1
A-1-2-1-11-1-2-B		3			1			1	1					
A-1-2-1-A-1-2-B	1	3						1	1					
A-1-2-B-2-21-2-B		1						3			1			1
A-1-2-B-2-1-2-B		1	1					3						1
A-1-2-B-2-B-2-B		1						1	2					2
A-1-11-1-2-21-2-B		2			1			2			1			
A-1-11-1-2-1-2-B		2	1		1			1	1					
A-1-11-1-2-B-2-B		2			1			1	1					1
A-1-11-1-11-1-2-B		2	1		2			1						
A-1-11-1-A-1-2-B	1	3			1			1						
A-1-11-111-11-1-2-B		2		2		1		1						
A-1-11-112-11-1-2-B		2		2			1	1						
A-1-A-1-2-21-2-B	1	1	1					2			1			
A-1-A-1-2-1-2-B	1	1	2					1	1					
A-1-A-1-2-B-2-B	1	1	1					1	1					1
A-1-A-1-11-1-2-B	1	2	1		1			1						
A-1-A-1-A-1-2-B	2	1	2					1						

dova. Ranije smo vidjeli da u svim realnim distribucijskim mrežama relativna razlika broja pozitivnih i negativnih modova pada u red veličine 1% i manje već kod supermodova 3. ili 4. reda, tako da opravdano slutimo da ćemo uspjeti dokazati da doista Dostertov tip modela propagacije dobro funkcionira u svakoj razvodnoj elektroenergetskoj mreži.

Tablica 5. prikazuje potencije faktora refleksije i transmisije za sve modove 1. reda u mreži prema slici 5. Tako npr. ukupan prijenosni faktor zbog svih refleksija i transmisija na čvorovima za mod  $A - 1 - 2 - 21 - 2 - B$  iznosi:  $t_d = \vartheta_1 \vartheta_2^2 \rho_{21}$ . Izražen u decibelima, taj faktor iznosi:  $20 \log t_d = 20 \log \vartheta_1 + 40 \log \vartheta_2 + 20 \log \rho_{21}$ . On ne sadrži u sebi podatke o gušenju linija, niti o bilo kakvom drugom uzroku gušenja, osim samih refleksija i transmisija na diskontinuitetima, pa ćemo ga nazvati *prijenosnim faktorom diskontinuiteta*. Iz ovakvoga prikaza možemo izračunati prijenosne faktore diskontinuiteta svih modova nekoga reda u općem slučaju, a onda, uvrštavanjem poznatih faktora refleksija i transmisija, možemo također izračunati iznose svih takvih faktora. U tablici 6. dajemo kao ilustraciju potencije faktora refleksije i transmisije za sve modove 2. reda.

Definirat ćemo prosječne prijenosne faktore diskontinuiteta za modove  $i$  – tog reda. Kako su ti faktori brojčano jednaki amplitudama modova, ponegdje ćemo ih kraće nazivati amplitudama.

- Prosječna vrijednost modula amplituda svih modova u supermodu  $i$  – tog reda,  $y_i = (\Sigma p + \Sigma n) / (N_i^+ + N_i^-)$ .
- Prosječna vrijednost modula amplituda pozitivnih modova u supermodu  $i$  – tog reda,  $f_i = \Sigma p / N_i^+$ .
- Prosječna vrijednost modula amplituda negativnih modova u supermodu  $i$  – tog reda,  $g_i = \Sigma n / N_i^-$ .

Sve ove veličine uvijek imaju pozitivne vrijednosti, jer je riječ o sumama modula amplituda. Oznaka  $\Sigma p$  simbolizira zbroj svih amplituda modova s pozitivnim prijenosnim faktorom diskontinuiteta, dočim  $\Sigma n$  obilježava zbroj svih modula amplituda modova s negativnim prijenosnim faktorom diskontinuiteta. Pomoću tih veličina proučit ćemo asimptotsko ponašanje interferencije modova u supermodu  $i$  – tog reda. Cilj nam je utvrditi možemo li maloprije utvrđenu osobinu, da je broj pozitivnih i negativnih modova u supermodu relativno to sličniji, što je red supermoda viši, preslikati i na stvarne amplitude supermodova. Ako možemo, to znači da svaku distribucijsku mrežu, čak i kada bi gušenje njenih vodiča bilo beskrajno malo, odlikuje brz pad amplituda supermodova višega reda, odnosno, da je Dostertov način modeliranja mreža sa samo nekoliko prvih odjeka, kojega je on provjerio na jednostavnoj mreži s visokim gušenjem [7], primjenjiv u svakoj distribucijskoj mreži.

Amplituda supermoda nastaje oduzimanjem zbroja modula amplituda svih negativnih modova od zbroja modula amplituda svih pozitivnih modova. S druge strane, amplitudu supermoda možemo pokušati procijeniti tako

da prosječnu vrijednost modula amplituda svih modova pomnožimo s razlikom broja pozitivnih i negativnih modova:

$$N_i^+ f_i - N_i^- g_i \approx N_i^+ y_i - N_i^- y_i. \quad (15)$$

Pritom želimo postići da je ta procjena što bolja. Postoji matematički uvjet na funkcije  $f_i, g_i$  i  $y_i$  pod kojim je procjena posve točna. Da bismo pronašli taj uvjet, napisat ćemo još i jednadžbu za zamišljeni slučaj, u kojem bi se umjesto oduzimanja ukupnih modula pozitivnih i negativnih modova dogodilo zbrajanje modula svih modova. On nam je potreban stoga što i izračun na lijevoj, i procjena na desnoj strani, daju identičan matematički točan rezultat. Dakle, u mreži koja ne bi imala negativno refleksivnih čvorova, naša procjena pomoću prosjeka modula svih modova,  $y_i$ , bila bi uvijek posve točna. Takva mreža je inače lako zamisliva, ali ne spada u klasu distribucijskih mreža. Svaka elektrodistribucijska mreža mora imati čvorove s negativnim faktorom refleksije. Sljedeća formula, koja dakle predstavlja zamišljenu, ali fizikalno korektnu situaciju, služi nam da bismo dobili još jednu jednadžbu za određivanje relacije između funkcija prosječnih amplituda:

$$N_i^+ f_i + N_i^- g_i = N_i^+ y_i + N_i^- y_i. \quad (16)$$

Čitatelj će se lako iz navedenih definicija uvjeriti da znak jednakosti u ovoj formuli vrijedi uvijek. U prethodne dvije jednadžbe, isti impulsi predstavljeni su na po dva načina, pa snage impulsa na lijevoj i desnoj strani moraju biti jednake u (16), tj. približno jednake u (15). Uvodimo sljedeće oznake:

- $P_a^D$  za snagu impulsa na lijevoj strani (15).
- $P_b^D$  za snagu impulsa na desnoj strani (15).
- $P_a^K$  za snagu impulsa na lijevoj strani (16).
- $P_b^K$  za snagu impulsa na desnoj strani (16).

Snagu predstavljamo kao kvadrat ukupne amplitude. Račun ćemo provesti u vremenskoj domeni, a čitatelj će lako provjeriti da Fourierovom transformacijom Diracovih impulsa i računanjem u frekvencijskoj domeni, slijede isti rezultati:

$$\begin{aligned} P_a^D &= (N_i^+)^2 f_i^2 - 2N_i^+ N_i^- f_i g_i + (N_i^-)^2 g_i^2. \\ P_b^D &= (N_i^+)^2 y_i^2 - 2N_i^+ N_i^- y_i^2 + (N_i^-)^2 y_i^2. \\ P_a^K &= (N_i^+)^2 f_i^2 + 2N_i^+ N_i^- f_i g_i + (N_i^-)^2 g_i^2. \\ P_b^K &= (N_i^+)^2 y_i^2 + 2N_i^+ N_i^- y_i^2 + (N_i^-)^2 y_i^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Međusobne razlike lijevih i desnih strana iznose:

$$\begin{aligned} P_a^K - P_a^D &= 4N_i^+ N_i^- f_i g_i, \\ P_b^K - P_b^D &= 4N_i^+ N_i^- y_i^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Kada bi procjena na desnoj strani (15) bila savršeno točna, gornje dvije razlike snaga bile bi, naravno, identične. To ćemo iskoristiti kao uvjet, prema kojemu jednostavno iz (18) slijedi:

$$y_i^2 = f_i g_i \quad (19)$$



Dakle, uvjet da procjena bude točna je taj da prosječna vrijednost modula svih modova u supermodu bude jednaka geometrijskoj sredini prosječnih vrijednosti modula amplituda pozitivnih i negativnih modova. Ovdje ćemo odmah reći, a kasnije i ilustrirati primjerom, da se takva osobina može uočiti već kod relativno niskog reda supermodova. U najvećem broju primjera gornja se jednakost prilično točno uspostavlja već kod supermoda trećeg reda. Za supermodove najnižeg reda ona evidentno ne može biti zadovoljena, u što se lako možemo uvjeriti pregledom bilo kojeg slučaja.

Vrlo je važno uočiti da u fiksiranoj strukturi mreže veličina  $y_i$  ima uvijek identičan iznos, bez obzira na pozitivan ili negativan predznak faktora refleksije bilo kojih čvorova. Naravno, veličine faktora refleksije moraju biti iste. Primjerice, idealne sklopke imaju faktor refleksije  $+1$  ili  $-1$ , i njihovo uklapanje ili zaklapanje uopće ne remeti veličinu  $y_i$ . Nadalje, promjena trošila iz izrazito niskoomskog u izrazito visookoomsko neće također potaći nikakvu promjenu u  $y_i$ .

Poznata je činjenica da je geometrijska sredina između dviju veličina uvijek uklještena između njih. Recimo da je  $f_i$  za  $k$  puta veća od  $y_i$ , tj.  $f_i = k y_i$ . Zbog (19),  $g_i$  mora očito biti  $k$  puta manja od  $y_i$ , dakle:  $g_i = y_i / k$ . Pogledajmo sada jednadžbu (16), za koju smo utvrdili da je matematički točna. Lako ćemo izvesti sljedeću jednakost:

$$\frac{N_i^+}{N_i^-} = \frac{y_i - g_i}{f_i - y_i} = 1, \quad \text{jer je} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{N_i^+}{N_i^-} = 1. \quad (20)$$

Da omjer broja pozitivnih i negativnih modova vrlo brzo teži u 1, dokazali smo ranije u ovom poglavlju. Dakle, već za supermodove 5. i višeg reda ovaj omjer razlikuje se od jedinice samo za djelić jednog postotka. Iz toga slijedi da u supermodovima višeg reda prosječna vrijednost modula amplituda svih modova biva jednaka aritmetičkoj sredini prosječnih vrijednosti modula pozitivnih i negativnih modova. To se, naime, trivijalno izvodi iz gornje jednadžbe. Geometrijska sredina brzo prelazi u aritmetičku, a to znači da se prosječne vrijednosti pozitivnih i negativnih modova vrlo malo razlikuju. Naime, pod tim uvjetima i inače geometrijska sredina postaje jednaka aritmetičkoj. Mi smo to izveli iz dokazane činjenice o relativno sve većoj jednakosti broja jednih i drugih modova u supermodu. To je ključna spoznaja, jer ona znači da s porastom reda supermoda  $i$  približna jednakost iz (15) biva sve točnija i točnija. Dakle, potvrdili smo da je amplituda supermodova višega reda razmjerna prosječnoj vrijednosti modula svih modova danog reda, i razlici broja pozitivnih i negativnih modova toga reda. Prema tomu, ranija razmatranja o rapidnom smanjenju relativne razlike u broju pozitivnih i negativnih modova s porastom reda  $i$  preslikavaju se izravno i na stvarne amplitude supermodova. Amplitude supermodova padaju još brže nego li veličina  $(N_i^+ - N_i^-) / (N_i^+ + N_i^-)$ . Brže zato što su viši modovi sve slabiji i slabiji, zbog rasta broja transmisija i refleksija u čvorovima.

Naglasimo pritom da do sada još uopće nismo uvažili gušenje materijala od kojih su načinjeni vodiči u mreži.

Dakle, da bismo utvrdili da svaka distribucijska mreža ima osobinu brzog prigušenja odziva višega reda, nije nam potrebna pretpostavka o gušenju u materijalu. Čak i idealna mreža bez materijalnog prigušenja pokazuje takve osobine, i zbog toga se može uspješno modelirati pomoću samo nekoliko prvih, odnosno najjačih, odjeka u vremenu, bez obzira na strukturu i gabaritne dimenzije mreže.

I jednadžbu (15) možemo podvrći istom postupku kao u (20). Tada ćemo u limesu, kada  $i$  poprima vrlo velike vrijednosti, dobiti da su prosjeci modula pozitivnih i negativnih modova,  $f_i$  i  $g_i$ , približno jednaki, a to znači i da su približno jednaki sa  $y_i$ . Dakle, na kraju se sva tri prosjeka počinju ponašati identično, i ustvari je samo  $y_i$  odgovoran za asimptotsko ponašanje amplituda supermodova.

No, kako se mijenjaju prosječne amplitude modova? Naši numerički primjeri pokazuju jaku crtu eksponencijalnog pada s porastom reda  $i$ . To je i inače vrlo prihvatljivo stoga što modovi  $i+1$  – og reda prolaze uvijek za po dva čvora više nego li modovi  $i$  – tog reda. Pri tom mogu pretrpjeti još jednu refleksiju i jednu transmisiju, ili pak dvije refleksije. Već u supermodovima trećeg i viših redova postoji velik broj pojedinačnih modova, dok od 5. reda nadalje taj broj možemo slobodno držati golemim. Pokazali smo da broj modova raste s redom  $i$  malo sporije nego li eksponencijalno. Prolazak dvaju dodatnih čvorova događa se u najrazličitijim kombinacijama parova faktora refleksija i transmisija. Kako se modovi ustvari do u nedogled repliciraju po uvijek istoj shemi, definiranoj tablicom mogućih tranzicija, za očekivati je da će, kada njihov broj postane velik, prosjek modula svih modova padati za isti faktor pri svakom povećanju broja  $i$ . U analiziranim strukturama utvrdili smo, primjerice, da su već od drugog reda nadalje moduli amplituda svih modova  $i+1$  – og reda prosječno 2,64 puta slabiji nego li oni  $i$  – tog reda. To znači da smo ustanovili, prema očekivanjima, da je funkcija  $y_i$  eksponencijalno padajuća, odnosno da ima oblik:

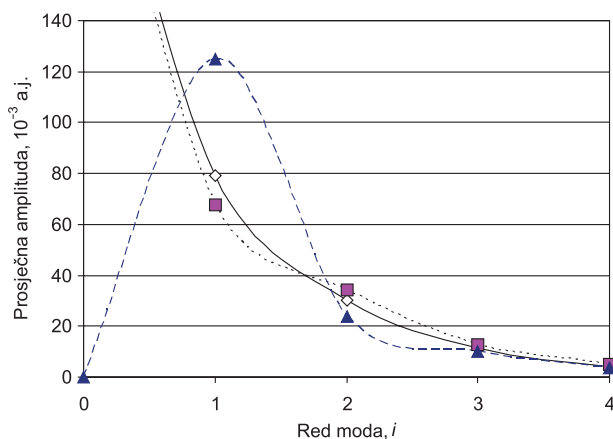
$$y_i = a \cdot \exp(-b \cdot i) \quad (21)$$

Istom argumentacijom moguće je pravdati očekivanje da će i  $f_i$  i  $g_i$  pokazivati eksponencijalni pad, odnosno da će biti  $f_i = c \exp(-d i)$ , tj.  $g_i = m \exp(-n i)$ . U tom slučaju, te dvije funkcije nisu neovisne o funkciji  $y$ . Naime, deriviranjem lijeve i desne strane jednadžbe (20) dobit ćemo sljedeći identitet:  $2y y_i' = f_i' g_i + g_i' f_i$ . Dijeljenjem sa  $y_i^2$ , i uvažavanjem odnosa (20), pronaći ćemo da je normirana derivacija funkcije prosječnog modula svih modova jednaka aritmetičkoj srednjoj vrijednosti normiranih derivacija funkcija prosječne vrijednosti modula pozitivnih i negativnih modova. Pod pojmom normirane derivacije razumijemo kvocijent derivacije funkcije i vrijednosti te funkcije u nekoj točki. Dakle,  $2(v_i'/y_i) = (f_i'/f_i) + (g_i'/g_i)$ . No, normirana derivacija eksponencijalne funkcije jednaka je faktoru uz argument  $i$ , tako da u našem slučaju mora

biti  $-2b = -d - n$ , odnosno,  $b = (d + n)/2$ . Znači, faktor koji karakterizira eksponencijalnu padajuću funkciju veličine  $y_i$  mora biti jednak aritmetičkoj sredini faktora eksponencijalnih funkcija za  $f_i$  i  $g_i$ . Inače vrijedi da je  $n > d$ , jer  $g_i$  brže pada. Broj  $d$ , koji je dakle manji od  $b$ , ograničen je tako da ne može biti manji ili jednak od nule, a zbog toga broj  $n$  nikako ne može biti veći od  $2b$ . Sve se to, inače, vidi i direktno iz (20). Relacije, naravno, ne vrijede za suviše mali  $i$ . Dakle, za eksponencijalno padajuće funkcije prosjeka modula amplituda modova  $i$  – tog reda vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} y_i = a \cdot \exp(-b \cdot i) \\ f_i = c \cdot \exp(-d \cdot i) \\ g_i = m \cdot \exp(-n \cdot i) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = (d + n)/2 \\ 0 < d \leq b \\ b \leq n < 2b \end{array} \right. \quad (22)$$

Na kraju ovoga razmatranja, na slici 14., dat ćemo jedan numerički primjer zakonitosti ponašanja prosječnih vrijednosti modova mreže sa slike 5., u kojoj su negativno reflektivne točke A, 1 i 2.



**Slika 14.** Ilustracija ponašanja prosječnih vrijednosti modula amplituda modova za strukturu prema slici 5, uz negativno reflektivne točke A, 1 i 2. Vidi se nepravilno ponašanje za modove najnižeg reda, uzrokovano malim brojem modova, zbog kojega prosjeci nemaju statističku signifikantnost. No, već nakon 3. reda polako se uspostavlja pravilnost opisana gore u tekstu. Na dijagramu su zbog preglednosti nacrtane krivulje. U stvarnosti, radi se o histogramima, pa vrijednosti ordinate treba očitavati samo za cjelobrojne vrijednosti apscise. Vrijednosti na ordinati dane su u tisućinkama arbitrarnih jedinica. Arbitarna jedinica odgovara amplitudi impulsa pobude na ulazu mreže. *Legenda:* romb: prosječna vrijednost modula amplituda svih modova; trokut: prosječna vrijednost modula amplituda negativnih modova; kvadrat: prosječna vrijednost modula amplituda pozitivnih modova.

### 3.11. Strukture u kojima grane u mreži nisu jednako dugačke

Do sada smo promatrali mrežnu konfiguraciju prema slici 5., u kojoj su sve duljine grana između čvorova bile jednake. Zbog toga su svi modovi u jednom supermodu stizali na određeno u isto vrijeme. Pitanje je na koji način možemo

pristupiti problemu u kojemu duljine grana nisu iste. Tu ćemo razlučiti tri slučaja:

- Sve grane imaju duljinu jednaku cjelobrojnom višekratniku najkraće grane.
- Sve grane imaju istu zajedničku mjeru.
- Postoje manja odstupanja u duljinama grana, koje bi inače zadovoljavale jedan od gornja dva kriterija.

Formalno, do postupka u prva dva slučaja dolazimo vrlo lako. Primjerice, ako u mreži postoje grane koje su dva puta dulje od onih drugih, jednostavno ćemo na njihovoj polovici zamisliti dodatni čvor, u kojemu će faktor transmisije biti jednak 1, a faktor refleksije 0. Složit ćemo novu tablicu mogućih tranzicija, i dalje postupati potpuno jednako kao i do sada. Zbog povećanog broja čvorova formalno će nastati veći broj modova, ali će također svi modovi raspirani refleksijom na tim čvorovima imati amplitudu jednaku nuli. Dakle, na izlazu ćemo dobivati supermodove u vremenskim intervalima koji odgovaraju najkraćoj grani u mreži. Posve isto razmatranje vrijedi za slučaj kada sve grane imaju neku najveću zajedničku mjeru. Tada ćemo dobivati supermodove koji će se pojavljivati u vremenskim intervalima koji korespondiraju najvećoj zajedničkoj mjeri duljina grana, ali će mnogi modovi, pa i neki supermodovi, imati amplitude jednake nuli. Što je najveća zajednička mjera manja u odnosu na najmanju duljinu grane u mreži, to će ovakav izračun postati kompliciraniji i nepraktičniji, jer ćemo računati formalno s velikim brojem modova, a broj onih koji nisu jednaki nuli bit će znatno manji. Dakle, nejednake duljine grana u mreži imaju za posljedicu samo porast broja čvornih točaka mreže, a na izlazu ćemo oslušivati odjeke svakih toliko vremena, koliko signalu treba da proputuje dvostruku duljinu najveće zajedničke mjere. Pri tom ne treba napraviti pogrešku, pa u model uvrstiti npr. *prva* četiri takva odjeka, jer će mnogi od njih biti naprosto jednaki nuli. Potrebno je, umjesto toga, pričekati četiri *najveća* odjeka, a ti će sigurno uključiti i modove koji prolaze stvarne čvorove u mreži. Tako će se obuhvatiti svojstva na niskim frekvencijama, primarno određena supermodovima s dugačkim vremenom propagacije, ali i ona visokofrekvencijska, određena najkraćim odsječcima mreže.

U ponekim mrežama se može dogoditi da postoje manja odstupanja u duljinama vodova. Što je odstupanje manje, to je manja najveća zajednička mjera, pa zbog toga nastaje mnoštvo umjetnih čvorova, koje u beskraj komplicira račun, a zapravo generira pretežito prazne supermodove, čija je amplituda jednaka nuli. Primjerice, u nekoj mreži duljine svih vodova mogu biti *približno* jednake 10 metara. Recimo da su sve duljine negdje između 7 i 13 metara. Što ćemo tu učiniti? Pogledajmo za koliko kasni ili rani signal koji prolazi dvostruku dionicu od 3m više ili manje od prosječnog moda:  $\tau = 2 \times 3 \text{ m} / 1,5 \times 10^8 \text{ m/s} = 40 \text{ ns}$ . Pretpostavili smo da je brzina propagacije dvaput manja nego u vakuumu. Dakle, "trag" te razlike u kašnjenju neće se vidjeti na frekvencijama manjim od nekih 25 MHz,

a u području PLC sustava nas zapravo i ne zanimaju frekvencije znatno iznad 25 MHz. Štoviše, taj trag sigurno neće biti osobito dubok, jer samo dio energije supermoda dolazi s ovako velikim zakašnjenjem. Preostali dio stiže s manjom vremenskom razlikom, odnosno, energija impulsa grupirana je oko prosječne duljine grana, ali pokazuje izvjesnu disperziju. Dakle, pouka glasi: ako se duljine grana u mreži razlikuju od prosječne duljine tek za nekoliko metara, najbolje je usvojiti jednostavan model, pretpostavivši da su sve duljine jednake prosječnoj. U unutarnjim mrežama možemo zanemariti rasipanja od 3 m ili manje, dočim u vanjskim mrežama možemo zanemariti i razlike od nekih 8 m, budući da područje interesantno za vanjske mreže završava na 10 MHz.

#### 4. ZAKLJUČAK

Propagacijski model za PLC mreže, koji je baziran u vremenskoj domeni, poopćen je za slučajeve proizvoljno složenih mreža razdjelnog tipa. Pronađeni algoritmi proračuna vrlo su komplicirani za izvršavanje, s obzirom da broj računskih operacija potrebnih za izračunavanje propagacije u jednom stacionarnom kanalu raste eksponencijalno s brojem grana u mreži, tako da izračuni u velikim mrežama gube smisao, u usporedbi s alternativnim pristupom u frekvencijskoj domeni.

#### LITERATURA

- [1] M.H.L. CHAN, R.W. DONALDSON, «Attenuation of Communication Signals on Residential and Commercial Intrabuilding Power-Distribution Circuits», IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, Vol. EMC-28, No.4, Nov. 1986.
- [2] L. SELANDER, «Powerline Communications: Channel Properties and Communication Strategies», PhD Thesis, Lund University, Sweden, 1999, dostupno na Internetu (2. lipnja 2004.): <http://www.enersearch.se/knowledgebase/publications/theses/pow-line.html>
- [3] K. DOSTERT, «High Speed Data Transmission over Power Lines Using Multi-Carrier (OFDM) Techniques», Frequenz, Vol. 54 (2000), No. 11-12.
- [4] O.G. HOOIJEN, «A Channel Model for the Residential Power Circuit Used as a Digital Communications Medium», IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, Vol. 40, No. 4, Nov. 1998.
- [5] D. LIU et al, «Wide Band AC Power Line Characterization», IEEE Trans. on Consumer Electronics, Vol. 45, No. 4, Nov. 1999.
- [6] K. DOSTERT, «Powerline Communications», Prentice Hall PTR, 2001.
- [7] M. ZIMMERMANN, K. DOSTERT, «A Multi-Path Signal Propagation Model for the Power Line Channel in the High Frequency Range», Proceedings of the 3rd International Symposium on Power-Line Communications, Lancaster, UK, 1999, dostupno na Internetu (2. lipnja 2004.): <http://www-iiit.etec.uni-karlsruhe.de/~plc/>
- [8] Z.A. BUKHALA et al, «Radio Frequency Signal Transmission on Medium Voltage Power Distribution Lines», IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 14, No. 1, Jan. 1999.
- [9] D. CHAFFANJON et al, «Differential and Common Mode Propagation in PLC Low Voltage Networks», IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 14, No. 2, April 1999.
- [10] D.M. POZAR, «Microwave Engineering», 2nd ed, John Wiley & Sons, Inc. 1998.
- [11] S. HAYKIN, B. VAN VEEN, «Signals and Systems», John Wiley & Sons, Inc. 1999.
- [12] S. HAYKIN, «Communication Systems», 3rd ed, John Wiley & Sons, Inc. 1994.
- [13] D. VELJAN, «Kombinatorna i diskretna matematika», 1. izdanje, Algoritam, Zagreb, 2001.

#### PROPAGATION MODEL GENERALIZATION BASED ON TIME DOMAIN FOR PLC NETWORK

In the paper the propagation model generalization for PLC networks is given, that is, a mathematical model developed to count modes of spreading in composed networks is developed. Also, asymptotic characteristics of all distribution networks' time response are determined. The conclusion is that propagation models in a time domain applied on realistic (composed) networks need too much computing effort so that it is better to approach to the problem in the frequency domain.

#### VERALLGEMEINERUNG VON MODELLEN DER FERNMELDETECHNIK AUF MITTRAGENDEN STARKSTROMNETZEN IN ZEITLICHEM BEREICH

In dieser Arbeit wird das Modell der Fernmeldetechnik auf mittragenden Starkstromnetzen einer verallgemeinerung unterzogen, bzw. wird eine mathematische Behandlungsweise für die Abzählung der Verbreitungsabwandlungen in verflochtenen Netzen verwendet. Bestimmt werden ebenfalls asymptotische Eigenschaften der zeitlichen Abfrage aller Verteilungsnetze.

Es wurde die Folgerung gezogen, dass die auf dem zeitlichen Bereich begründeten Modelle

der Fernmeldetechnik in der Anwendung auf tatsächliche (verflochtene) Netze zuviel rechnerischen Aufwands beanspruchen, so dass es vorteilhafter ist diesem Problem im Bereich der Frequenzen beizutreten.

Naslov pisca:

**Dr. sc. Dubravko Sabolić, dipl. ing.**  
**HEP Operator prijenosnog sustava d.o.o.**  
**Kupska bb, 10000 Zagreb**  
**Hrvatska**

Uredništvo primilo rukopis:  
 2004-12-08