

# GRANICE VALJANOSTI IZRAZA ZA MJERENJA SPECIFIČNOG OTPORA TLA WENNEROVOM METODOM PREMA IEEE NORMI Std. 81-1983 VALIDITY LIMITS OF THE EXPRESSION FOR MEASURING SOIL RESISTIVITY BY THE WENNER METHOD ACCORDING TO IEEE STANDARD 81-1983

Mr. sc. Tomislav Barić, dr. sc. Damir Šljivac,  
Sveučilište J. J. Strossmayer, Elektrotehnički Fakultet,  
Kneza Trpimira 2b, 31000 Osijek, Hrvatska  
Dr. sc. Marinko Stojkov, HEP Operator distribucijskog sustava d.o.o.,  
P. Krešimira IV 11, 35000 Slavonski Brod, Hrvatska

Za analizu rezultata i obavljanje mjerenja specifičnog otpora tla inženjerima su dane na raspolaganje smjernice i nautci različitih međunarodnih normi. Prilikom korištenja matematičkih izraza iz navedenih normi često nisu jasne okolnosti pod kojima su dobiveni navedeni izrazi. Jedan takav slučaj opisan je u ovom članku, a odnosi se na međunarodnu normu IEEE Std. 81-1983, izraz za prividni specifični otpor tla, a koji se odnosi na teorijski model i predviđanje mjernih rezultata dobivenih Wennerovim mjernim rasporedom elektroda. U IEEE Std. 81-1983 štapne elektrode su modelirane kao kuglaste, što u konačnici rezultira jednostavnim matematičkim izrazom za prividni specifični otpor tla. Zbog navedenog pojednostavljenja inženjeri nemaju uvid u granice valjanosti prema normi dobivenog izraza, odnosno njegovu točnost.

For the analysis of soil resistivity results and measurement, engineers have guidelines and instructions from various international standards at their disposal. The circumstances under which the mathematical expressions in these standards were obtained are not always clear. One such case is described in this article and refers to the international IEEE Standard 81-1983, an expression for apparent soil resistivity, and refers to a theoretical model and the prediction and interpretation of measurement results obtained by using the Wenner method of electrode arrangement. In IEEE Std. 81-1983, rod electrodes are modeled as spherical, which ultimately results in a simplified mathematical expression for apparent soil resistivity. Due to this simplification, the expression in this standard does not provide engineers with insight into its validity limits, i.e. accuracy.

**Ključne riječi:** IEEE std. 81-1983, prividni otpor tla, specifični otpor tla, Wennerov raspored elektroda  
**Key words:** apparent soil resistivity, IEEE Std. 81-1983, soil resistivity, Wenner electrode arrangement



## 1 UVOD

Reforma školstva fakultetskog i srednjeg obrazovanja kontinuiran je proces koji se odvija u cijelome svijetu. Reforme najčešće imaju trend smanjivanja opsega nastavnog gradiva, koji se provodi smanjenjem udjela satnice teorijskih predmeta, a povećanjem udjela nastavnih sati praktične nastave, odnosno znanstveno usmjeravajući predmeti. Inženjeri školovani u takvom okruženju suočeni su s poteškoćama u tumačenju i korištenju matematičkog instrumentarija pri složenijim zadaćama, a koje im se nameću u inženjerskoj praksi. Iz tog razloga različita normativna međunarodna tijela prilikom izdavanja normi, čije smjernice i nuputke i mi slijedimo, koriste vrlo jednostavne matematičke izraze u svojim izdanjima. Takvi izrazi izvedeni su pod brojnim pretpostavkama, kako fizikalnim, tako i matematičkim. Navedena pojednostavljena fizikalne slike opravdana su pod određenim uvjetima koji se u normama često ne navode. Naime, mnoge norme pisane su u vrijeme kada je nastavni program u većini zemalja svijeta sadržajno bio bogatiji teorijskim predmetima te većom satnicom matematike. Inženjeri kao korisnici normi u takvim uvjetima često nemaju potpunu predodžbu o mogućoj pogrešci pri korištenju normom preporučenih izraza za proračune ukoliko se ista koristi u graničnim uvjetima, ili izvan njih. Osim navedenog, znatan udio međunarodnih normi pisan je unazad nekoliko desetljeća, u vrijeme kada su osobna računala bila dostupna užem krugu inženjerske populacije. Naime, tek od kolovoza 1981. godine kada je IBM na tržište lansirao osobno računalo (PC) započela je era osobnih računala. Danas, 25 godina poslije, kada gotovo svaki inženjer u razvijenom svijetu posjeduje osobno računalo nije potrebno da se za inženjerske proračune koriste matematički pojednostavljeni izrazi, koji vrijede u vrlo uskim granicama fizikalnih varijabli. Ovaj članak daje osvrt na jedan takav izraz opisan međunarodnom normom IEEE Std. 81-1983 [1] za interpretaciju mjernih rezultata mjerenjem specifičnog otpora tla Wennerovom metodom. Da bi se odredila točnost izraza prema međunarodnoj normi IEEE Std. 81-1983 određen je točan izraz za prividni specifični električni otpor dvoslojnog tla mjeren Wennerovom tehnikom [2]. Na nekoliko primjera koji se mogu javiti u praksi određena je pogreška predviđanja prividnog specifičnog otpora tla prema normi IEEE Std. 81-1983 u odnosu na točniji pristup prikazan u ovom članku. Rezultati oba pristupa prikazani su analitički, grafički te diskutirani.

## 1 INTRODUCTION

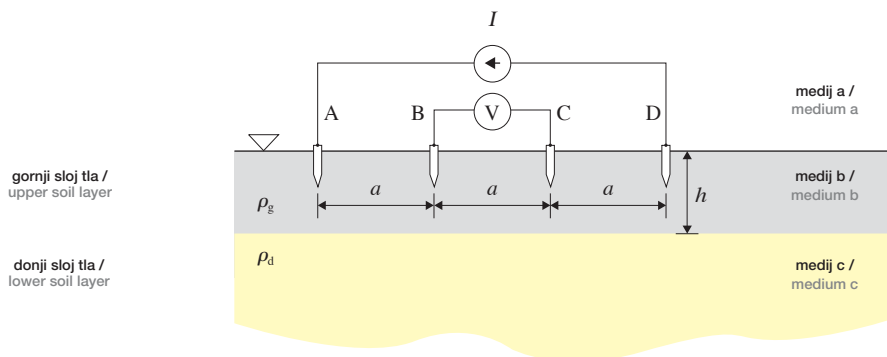
Reform of higher and secondary education is an ongoing process throughout the world. Reforms most often tend to reduce the range of material taught and are implemented by reducing the percentage of the class hours devoted to theoretical subjects and increasing the percentage of class hours devoted to practical subjects, i.e. scientifically oriented subjects. Engineers schooled in such an environment are confronted by difficulties in interpreting and using mathematical instrumentation in the complex tasks they encounter in practice. For this reason, various international institutions use highly simplified mathematical expressions when issuing the standards whose guidelines and instructions we follow. Such expressions have been derived under numerous assumptions, both physical and mathematical. This simplification of the physical picture is justified under certain circumstances, which are not frequently mentioned in the standards. Many standards were written at a time when the curricula in the majority of the countries in the world included more theoretical subjects and hours of mathematics. Engineers, as the users of these standards under such circumstances, are frequently not fully aware of the errors that are possible when using the expressions recommended by the standards for calculations under or outside boundary conditions. Moreover, a significant percentage of the international standards were written several decades ago, at a time when personal computers (PCs) were only available to small group of the engineering population. It has only been since August 1981 that IBM launched the personal computer on the market and launched the PC era. Today, twenty-five years later, when nearly every engineer in the developed world possesses a personal computer, it is not necessary to use mathematically simplified expressions for engineering calculations, which are only valid under very narrow limits of physical variables. This article provides a review of such an expression described by an international standard, IEEE Std. 81-1983 [1] for the interpretation of the results of the measurement of soil resistivity using the Wenner method. In order to determine the precision of the expression according to IEEE Std. 81-1983, a precise expression has been determined for the apparent resistivity of a two-layer soil model using the Wenner technique [2]. The error in predicting and interpreting apparent soil resistivity in several examples that can occur in practice was determined according to IEEE Std. 81-1983 and compared to the precise approach presented in this article. The results of both approaches are presented graphically and analytically, and are discussed.

## 2 MJERENJE SPECIFIČNOG OTPORA TLA

Najčešće preporučivana i korištena mjerna tehnika električnog mjerenja specifičnog otpora tla je Wennerova metoda [2] (slika 1). Razlog rasprostranjenosti uporabe navedene mjerne tehnike je u jednostavnosti interpretacije mjernih rezultata [3] i [4].

## 2 MEASUREMENT OF SOIL RESISTIVITY

The most frequently recommended and used measurement technique for the electrical measurement of soil resistivity is the Wenner method [2] (Figure 1). The reason for the widespread use of this measurement technique is the simplicity of the interpretation of the measured results [3] and [4].



**Slika 1**  
Dvoslojno tlo i Wennerov raspored elektroda  
**Figure 1**  
Two-layer soil and the Wenner electrode arrangement

Navedena mjerna tehnika veoma je prikladna za određivanje parametara dvoslojnog tla. Postupak mjerenja obavlja se za tu namjenu specijaliziranim baterijski napajanim mjernim uređajem. Mjerni uređaj u sebi sadrži strujni izvor sinusno promjenjive struje kojemu je frekvencija različita od mrežne, tj. od 50/60 Hz, koja se ne podudara s mogućim harmonicima mreže, filter kojim se izdvaja izmjenični mjerni napon frekvencije strujnog izvora mjereno voltmetrom, a koji potiskuju ostale frekvencije te ampermetar.

This measurement technique is highly suitable for determining the parameters of two-layer soil. The measurement procedure is performed for this purpose using a specialized battery-operated measuring device. The measuring device consists of a sinusoidal current source of variable amplitude, the frequency of which differs from that of the mains frequency, i.e. 50/60 Hz and does not coincide with possible mains harmonics, a filter that separates alternating measuring voltage of the frequency of the current source measured by a voltmeter and attenuates other frequencies, and an amp meter.

### 3 STATIČKI MODEL STRUJNOG POLJA

Tumačenje dobivenih mjernih rezultata temelji se na statičkom modelu strujnog polja u tlu [5]. U tu svrhu koristi se tehnika odslikavanja izvora strujnih polja na granicama diskontinuiteta specifičnog električnog otpora tla (slika 2a). Utiskivanjem struje  $I$  kroz strujne elektrode u tlo, nastalo strujno polje u dvoslojnom tlu mora zadovoljiti rubne uvjete na granicama diskontinuiteta specifičnog električnog otpora: tlo-zrak, te gornjeg i donjeg sloja tla, a koji glase [5] i [6]:

$$n \times (\rho_a J_a - \rho_b J_b) = 0, \quad n \times (\rho_b J_b - \rho_c J_c) = 0 \quad (1)$$

$$n \cdot (J_a - J_b) = 0, \quad n \cdot (J_b - J_c) = 0. \quad (2)$$

gdje je:

- $n$  – vektor normale na granice diskontinuiteta specifičnog električnog otpora,
- $J_a$  – gustoća struje u mediju a (zrak) na granici diskontinuiteta specifičnog električnog otpora,
- $J_b$  – gustoća struje u mediju b (gornji sloj tla) na granici diskontinuiteta specifičnog električnog otpora i
- $J_c$  – gustoća struje u mediju c (donji sloj tla) na granici diskontinuiteta specifičnog električnog otpora.

Zrak (medij a) ima visok specifični električni otpor za koji se misli da može biti  $10^{18} \Omega\text{m}$ . Iz tog razloga može ga se gotovo bez ikakve pogreške smatrati izolatorom [7] i [8]. Poznavanje rubnih uvjeta (1) i (2) na granicama diskontinuiteta specifičnog električnog otpora omogućava matematičko rješavanje zadaće i određivanje potencijala na naponskim mjernim elektrodama (slika 1).

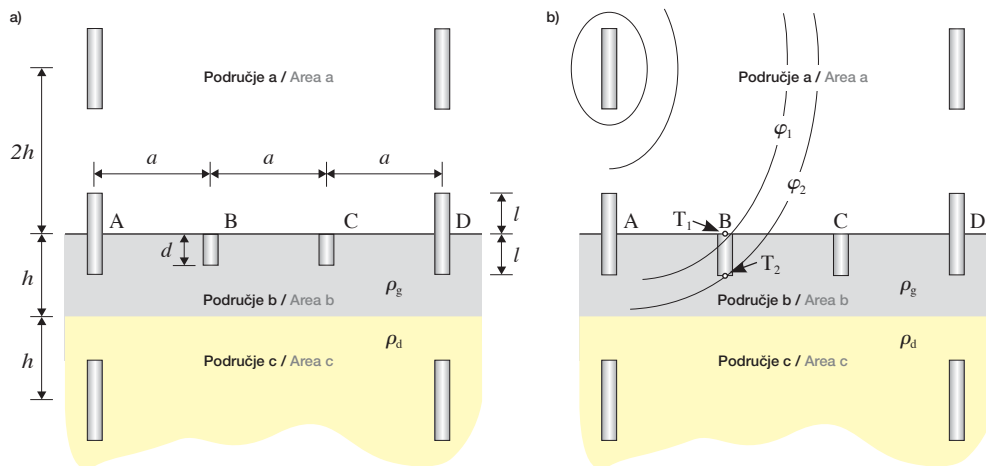
### 3 STATIC MODEL OF A CURRENT FIELD

Interpretation of the measurement results is based upon a static model of a current field in the soil [5]. For this purpose, the method of images is used to describe the discontinuity boundaries of soil resistivity (Figure 2a). The current field resulting from the injection of current  $I$  through the current electrodes in the two-layer soil must satisfy the boundary conditions at the discontinuity boundaries of resistivity: soil-air, the upper soil layer and the lower soil layer, as stated in [5] and [6]:

Where:

- $n$  – is the normal vector at the discontinuity boundary of resistivity,
- $J_a$  – is the current density in medium a (air) at the discontinuity boundary of resistivity,
- $J_b$  – is the current density in medium b (upper soil layer) at the discontinuity boundary of resistivity and
- $J_c$  – is the current density in medium c (lower soil layer) at the discontinuity boundary of resistivity.

Air (medium a) has high specific resistivity, and is thought to be  $10^{18} \Omega\text{m}$ . For this reason, it can be considered as an insulator, with practically no error [7] and [8]. Knowing the boundary conditions (1) and (2) at the discontinuity boundary of specific resistivity facilitates the mathematical solution of the task and the determination of the potential on the voltage measurement electrodes (Figure 1).



**Slika 2**  
Wennerov raspored elektroda, dvoslojno tlo i odslikavanje strujnih elektroda  
**Figure 2**  
Wenner electrode arrangement, two-layer soil images of current electrodes

Prema teoriji odslikavanja [5] izvori strujnog polja, tj. strujne elektrode A i D odslikavaju se od granica diskontinuiteta specifičnog električnog otpora. Prvo odslikavanje odvija se na granici tlo-zrak. Ukopani dio strujnih elektroda duljine  $l$  odslikava se od granice tlo-zrak, u elektrodu duljine  $l$ , a iz koje istječe jednaka struja kao iz originalne elektrode. S obzirom da jednaka struja istječe iz originalne elektrode i njezine slike u području a, te kako se one dodiruju na granici tlo-zrak, možemo ih za proračune u području b promatrati kao jednu cjelinu, tj. kao elektrodu dvostruke duljine  $2l$ , a iz koje istječe dvostruka struja. Tako nastali konglomerati originalnih strujnih elektroda A i D s njihovim slikama koje se nalaze u području a odslikavaju se od granice između gornjeg i donjeg sloja tla, tj. od granice između područja b i c u područje c. Novonastale slike nalaze se u području c (donji sloj tla), a središte slika štapnih elektroda udaljeno je od granice tlo-zrak za dvostruku debljinu gornjeg sloja tla, te iznosi  $2h$ . Iz ove slike elektrode A više ne istječe struja  $2I$ , nego  $\beta \cdot 2I$ , gdje je  $\beta$  koeficijent odslikavanja između područja b i c ( $\beta = (\rho_d - \rho_g) / (\rho_d + \rho_g)$ ).

U idućem koraku potrebno je odslikati zamišljene slike iz područja c u područje a. Odslikavanje iz područja c u područje a odvija se na granici tlo-zrak, a središta novonastalih zamišljenih slika u području a nalaze se na jednakoj udaljenosti od granice tlo-zrak, kao i zamišljene slike iz prethodnog koraka u području c, a koja odgovara dvostrukoj debljini gornjeg sloja tla te iznosi  $2h$ . U ovom slučaju odslikavanje iz područja c u područje a ne mijenja iznos struje koja istječe iz zamišljene elektrode u području a, jer je koeficijent odslikavanja jednak jedinici s obzirom da se područje a (zrak) može smatrati izolatorom. Tako dobivene zamišljene slike u području a (zrak) potrebno je ponovno odslikati od granice između gornjeg i do-

According to the method of images theory [5], the sources of the current field, i.e. current electrodes A and D are mirrored at the discontinuity boundary of resistivity. The first application of the method of images occurs at the soil-air boundary. The parts of the current electrodes buried in the soil of length  $l$  are mirrored at the soil-air boundary, in an electrode of length  $l$  from which equal current flows out as from the original electrode. Since equal current flows from the original electrode and its image in Area a, and since they touch the soil-air boundary, for calculations in Area b we can consider them to be a single entity, i.e. an electrode of double length  $2l$  from which double current flows. Thus, such conglomerates of original current electrodes A and D, with their images in Area a are by the method of images mirrored at the boundary between the upper and lower soil layers, i.e. from the boundary between Area b and Area c in Area c. The new images are located in Area c (lower soil layer) and the center of the image of the rod electrodes is at a distance from the soil-air boundary of two times the thickness of the upper soil layer, amounting to  $2h$ . Current  $\beta \cdot 2I$  instead of  $2I$  flows from this image of electrode A, where  $\beta$  is the reflection coefficient [1] (reflection factor [3]) between Areas b and c ( $\beta = (\rho_d - \rho_g) / (\rho_d + \rho_g)$ ).

In the next step, it is necessary to apply the method of images on the imaginary image in Area c to mirror them in Area a. Mirroring from Area c to Area a occurs at the soil-air boundary, and the centers of the new imaginary images in Area a are at the same distance from the soil-air boundary as the imaginary images from the previous step in Area c, which corresponds to a thickness twice that of the upper soil layer and equals  $2h$ . In this case, the mirroring from Area c to Area a does not alter the amount of current that flows from the imaginary electrode in Area a, because the reflection coefficient is equal to 1,

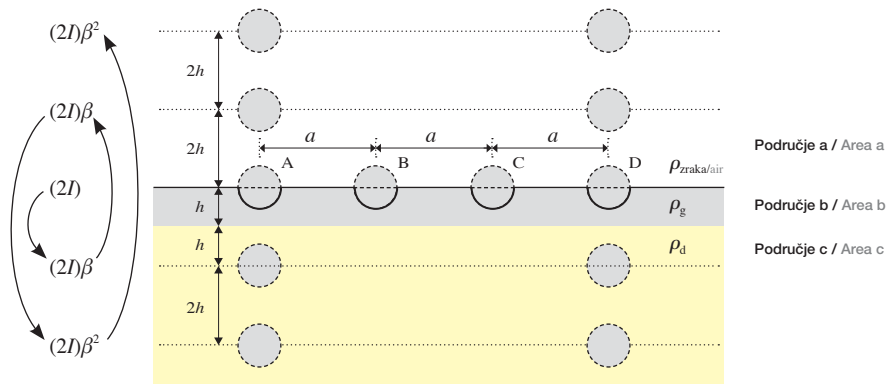
njeg sloja tla, tj. područja b i c u područje c, s koeficijentom odslikavanja  $\beta$ , te se takav postupak nastavlja unedogled. Prilikom svakog odslikavanja od granica diskontinuiteta električnih značajki (specifičnog električnog otpora tla) povećava se udaljenost novonastalih zamišljenih izvora polja od granice tlo-zrak te se njihova središta nalaze na udaljenosti od granice tlo-zrak  $h, 2h, 4h, \dots, 2nh$ , gdje je  $n$  redni broj zamišljene slike.

Za razliku od prikazanog odslikavanja u kojemu je očuvana stvarna geometrija strujnih izvora polja (elektrode A i D) prema slici 2a, u međunarodnoj normi IEEE Std. 81-1983 [1] navedeno odslikavanje je znatno pojednostavljeno. Naime, **prva pretpostavka** koja je učinjena u fizikalnom modelu norme IEEE Std. 81-1983, je zamjena štapnih elektroda s polukuglama, koje su se stopile sa svojom slikom iz područja a, koja je također polukugla, pa se daljnje odslikavanje provodi s kuglama (slika 3).

since Area a (air) can be considered as an insulator. Such obtained imaginary images in Area a (air) must be mirrored again from the boundary between the upper and lower soil layers, i.e. Areas b and c in Area c, with the reflection coefficient  $\beta$ , and such a procedure is continued indefinitely. On the occasion of every mirroring from the discontinuity boundary of soil resistivity, the distance increases between the new imaginary field sources and the soil-air boundary, and their centers are located at distances from the soil-air boundary of  $h, 2h, 4h, \dots, 2nh$  where  $n$  is the ordinal number of the imaginary image.

Unlike the mirroring presented in which the actual geometry of the current source fields (electrodes A and D) is according to Figure 2a, this mirroring is significantly simplified in the international IEEE Std. 81-1983 [1]. **The first assumption** in the physical model of IEEE Std. 81-1983 is the replacement of rod electrodes with hemispherical ones, which merge with their image from Area a, which is also a hemisphere, and further mirroring is conducted with spheres (Figure 3).

**Slika 3**  
Odslikavanje u dvoslojnom tlu ekvivalentnim kuglama i Wennerov raspored elektroda  
Figure 3  
Mirroring in two-layer soil with equivalent spheres and the Wenner electrode arrangement



Predstavljanjem štapnih (cilindričnih) elektroda strujnih mjernih sondi s kuglama omogućeno je korištenje izraza za potencijal u okolišu kugle, odnosno točkaste izvore polja, jer se potencijal određuje izvan ekvivalentne kugle. Izrazi za električni potencijal u prostoru oko točkastih izvora polja su matematički vrlo jednostavni. Zbog navedenog pojednostavljenja izraz za prividni specifični otpor tla prema IEEE normi Std. 81-1983 [1] je valjan ukoliko je dovoljno velik razmak između susjednih elektroda  $a$ . Naime, ukoliko je dovoljno velik razmak između elektroda  $a$ , tada su ekvipotencijalne krivulje koje su uzrokovane strujnim elektrodama cilindričnog oblika slične ekvipotencijalnim krivuljama točkastih izvora polja.

Presenting the rod (cylindrical) electrodes of current measuring probes with spheres permits the use of the expression for potential in the sphere vicinity, i.e. field point sources, because the potential is determined outside the equivalent sphere. Expressions for electric potential around the point sources are mathematically very simple. Therefore, the cited simplified expression for apparent soil resistivity according to IEEE Std. 81-1983 [1] is valid if there are sufficiently large spaces between the neighboring electrodes  $a$ . If there is a sufficiently large space between electrodes  $a$ , the equipotential curves that are caused by cylindrical current electrodes are similar to the equipotential curves of the point sources.

Ekvipotencijalne krivulje kojeg uzrokuju cilindrične elektrode su oblika elipse, a ukoliko je točka promatranja daleko od elektrode ekvipotencijalna krivulja koja prolazi kroz nju je približno kružnog oblika, što odgovara točkastom izvoru polja (slika 2b). Iz navedenog je jasan fizikalni smisao pojednostavljenja, ali ne i utjecaj navedenog pojednostavljenja na pogrešku pri određivanju specifičnog otpora tla, pogotovo u slučaju kada su mjerne elektrode relativno blizu jedna drugoj. Da bi se dobio odgovor na ovo pitanje potrebno je odrediti izraz za prividni specifični otpor tla mjeren Wennerovim spojem u kojemu su mjerne elektrode modelirane kao štapovi (tanki cilindri). Zatim je na nekoliko primjera iz prakse određena pogreška koja nastaje zbog modeliranja štapnih elektroda s kuglama te utjecaj blizine elektroda na mjerenje.

#### 4 ODREĐIVANJE TOČNOG IZRAZA ZA PRIVIDNI SPECIFIČNI OTPOR TLA

Postupak određivanja točnog izraza za prividni specifični električni otpor tla sastoji se od nekoliko koraka. U prvom koraku potrebno je pronaći neki jednostavniji izraz uz pomoć kojega se lako određuje potencijal u okolini štapne elektrode iz koje istječe struja  $I$ , kada se ona nalazi u neograničenom mediju. U drugom koraku potrebno je uvažiti utjecaj granice tlo-zrak korištenjem tehnike odslikavanja, te određivanje izraza za skalarni električni potencijal na mjestu jedne od naponskih mjernih elektroda. Treći korak sastoji se od uvažavanja još jedne granice diskontinuiteta specifičnog električnog otpora tla, a koja se nalazi ispod gornjeg sloja tla. Kao i u prethodnom koraku primjenom tehnike odslikavanja, potrebno je odrediti potencijal u gornjem sloju tla (područje b) na mjestu jedne od naponskih mjernih elektroda. U posljednjem koraku na temelju prethodno određenih izraza potrebno je odrediti izraz za prividni specifični električni otpor dvoslojnog tla mjerne Wennerovim rasporedom elektroda (slika 1).

Skalarni električni potencijal u okolini štapne elektrode konačne duljine  $l$  iz koje istječe struja  $I$ , a koji se nalazi u neograničenom mediju specifičnog otpora  $\rho_g$  prikazan slikom 4a prema [5] glasi:

$$\varphi(x, y) = \frac{l\rho_g}{4\pi l} \ln \frac{x+c+\sqrt{(x+c)^2+y^2}}{x-c+\sqrt{(x-c)^2+y^2}}, \quad (3)$$

Equipotential curves caused by cylindrical electrodes are in the form of an ellipse, and if the observation point is distant from the electrode, the equipotential curve that passes through it is approximately round in shape, which corresponds to the point source (Figure 2b). Therefore, the physical purpose of simplification is clear but not the impact of this simplification on the error in determining soil resistivity, especially when measurement electrodes are relatively close to each other. In order to obtain an answer to this question, it is necessary to define an expression for apparent soil resistivity measured by the Wenner method in which the measurement electrodes are modeled as rods (thin cylinders). In several actual examples, errors were determined that occurred due to modeled rod electrodes with spheres and the influence of the vicinity of the electrodes upon measurement.

#### 4 DEFINITION OF A PRECISE EXPRESSION FOR APPARENT SOIL RESISTIVITY

The procedure for defining a precise expression for apparent soil resistivity consists of several steps. In the first step, it is necessary to find a simpler expression with the help of which potential can be easily defined in the vicinity a rod electrode from which current  $I$  flows, when it is in an infinite medium. In the second step, it is necessary to take into account the influence of the soil-air boundary by using the method of images and the determination of an expression for electrical scalar potential on the site of one of the voltage measurement electrodes. The third step consists of taking into account one more discontinuity boundary of soil resistivity, which is found below the upper soil layer. As in the previous step in the applied method of images, it is necessary to define the potential in the upper soil layer (Area b) at the site of one of the voltage measurement electrodes. In the final step, based on the previously defined expressions, it is necessary to define an expression for the apparent resistivity of two-layer soil measured using the Wenner electrode arrangement (Figure 1).

The electrical scalar potential in the vicinity of a rod electrode of the final length  $l$ , from which current  $I$  flows, located in an infinite medium of resistivity  $\rho_g$  shown in Figure 4a according to [5], is as follows:



gdje je:

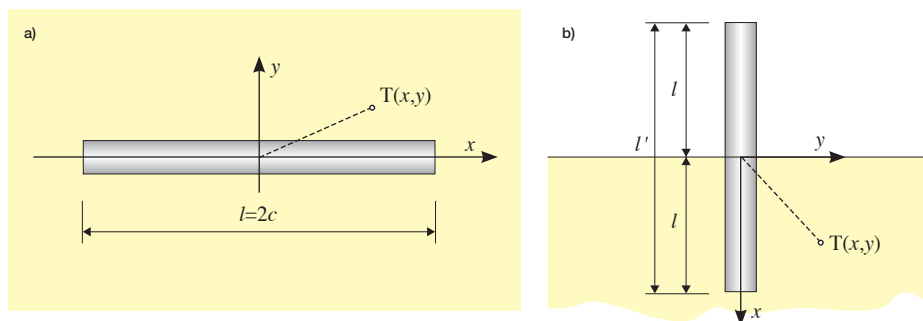
- $I$  – struja koja istječe iz površine vodiča (A),
- $\rho_g$  – specifični električni otpor gornjeg sloja tla ( $\Omega\text{m}$ ),
- $l$  – duljina vodiča elektrode (m),
- $c$  – pola duljine vodiča strujne elektrode ( $l=2c$ ).

where:

- $I$  – the current that flows from the conductor surface (A),
- $\rho_g$  – the resistivity of the upper soil layer ( $\Omega\text{m}$ ),
- $l$  – the length of the electrode (m),
- $c$  – half the length of the current electrode ( $l=2c$ ) (m).

Slika 4

Ravni štap i relevantna geometrija  
Figure 4  
Straight rod and the relevant geometry



Stapanjem strujne elektrode duljine  $l$  s njezinom slikom novonastala elektroda ima duljinu  $l'=2l$  (slika 4b), a ukupna struja koja istječe iz nastalog konglomerata iznosi  $I=2I$ , te je potencijal u okolini takve elektrode prema slici 4b za  $x>0$  dan izrazom:

With the merging of a current electrode of the length  $l$  with its image, the new electrode has the length of  $l'=2l$  (Figure 4b), and the total current that flows from the new conglomerate amounts to  $I=2I$ , and the potential in the vicinity of such an electrode according to Figure 4b for  $x>0$  is given with the following expression:

$$\varphi(x,y) = \frac{(2I)\rho_g}{4\pi l'} \ln \frac{x+l'/2 + \sqrt{(x+l'/2)^2 + y^2}}{x-l'/2 + \sqrt{(x-l'/2)^2 + y^2}} = \frac{I\rho_g}{4\pi l} \ln \frac{x+l + \sqrt{(x+l)^2 + y^2}}{x-l + \sqrt{(x-l)^2 + y^2}} \quad (4)$$

Naravno, pod duljinom elektrode koja se odslila od granice tlo-zrak **razmatra se samo ukopani dio strujne elektrode u tlu** (ono što je izvor polja). Potencijal na mjestu naponske elektrode B zbog istjecanja struje iz strujne elektrode A stopljene sa svojom slikom koja se nalazi u području a (slika 4b), i utjecanja struje u strujnu elektrodu D stopljene sa svojom slikom koja se nalazi u području a (slika 4b), u točki  $T_1$  (slika 2b) u jednoslojnom tlu iskazan geometrijom mjernog spoja glasi:

Naturally, along the length of the electrode that is mirrored at the soil-air boundary, **only the part of the electrode buried in the soil is considered** (that which is the source of the field). The potential at the site of voltage electrode B due to the flow of current from current electrode A merged with its image that is located in Area a (Figure 4b), and the inflow of current in electrode D merged with its image that is located in Area a (Figure 4b), at point  $T_1$  (Figure 2b) in one layer soil is expressed by the geometry of the measurement circuit, as follows:

$$\varphi_b = \frac{I\rho_g}{4\pi l} \ln \left( \frac{l + \sqrt{l^2 + a^2}}{-l + \sqrt{l^2 + a^2}} \cdot \frac{-l + \sqrt{l^2 + (2a)^2}}{l + \sqrt{l^2 + (2a)^2}} \right) \quad (5)$$

Zbog simetrije potencijal elektrode C suprotnog je predznaka od potencijala elektrode B, te vrijedi:  $\varphi_C = -\varphi_B$ . Potencijal  $\varphi_B$ , odnosno potencijal  $\varphi_C$  određeni su na uzdužnim osima naponskih mjernih elektroda B i C u točki koja dodiruje granicu tlo-zrak (slika 2b). Međutim, treba imati na umu da potencijal treba odrediti metodom srednjeg potencijala, jer se prema izrazu (4) potencijal mijenja duž uzdužne osi naponske elektrode. Naočigled je ova konstatacija zbunjujuća, jer se sve točke na idealnom vodiču pri elektrostatskim uvjetima nalaze na jednakom potencijalu. Da bi sve točke vodiča naponskih elektroda bile na jednakom potencijalu, bilo bi potrebno vršiti odslikavanje od cilindrične granice, tj. strujnih elektroda od površine naponskih elektroda. Međutim, kako je duljina naponskih mjernih elektroda konačna, takvo odslikavanje je teško provedivo. Zanimarivanjem odslikavanja strujnih elektroda od naponskih mjernih elektroda, vodiči naponskih mjernih elektroda presijecaju različite ekvipotencijalne krivulje uzrokovanih strujnim elektrodama (slika 2b). Iako su sve točke na idealnom vodiču u statičkom polju na jednakom potencijalu, matematički nije jednostavno odrediti iznos tog potencijala. U takvim slučajevima ukoliko je moguće koristi se **metoda srednjeg potencijala**. Srednja vrijednost potencijala predstavlja nepristranu procjenu potencijala na kojemu se nalazi vodič naponske mjerne elektrode.

Uzmimo da je duljina strujnih mjernih elektroda  $l$ , a naponskih mjernih elektroda  $d$  (slika 2a).

Tada srednji potencijal na mjestu naponske elektrode B zbog struje konglomerata elektrode A i njezine slike u području a, te konglomerata strujne elektrode D i njezine slike u području a glasi:

$$\bar{\varphi}_B = \frac{1}{d} \int_0^d \varphi(x, y = a) dx. \quad (6)$$

Srednji potencijal elektrode B zbog struja konglomerata originalne elektrode A, koja se nalazi u području b i njezine zamišljene slike koja se nalazi u području a, te konglomerata originalne elektrode D, koja se nalazi u području b i njezine zamišljene slike koja se nalazi u području a glasi:

$$\bar{\varphi}_B = \frac{I\rho_s}{4\pi ld} \int_0^d \left( \ln \frac{x+l+\sqrt{(x+l)^2+a^2}}{x-l+\sqrt{(x-l)^2+a^2}} - \ln \frac{x+l+\sqrt{(x+l)^2+(2a)^2}}{x-l+\sqrt{(x-l)^2+(2a)^2}} \right) dx. \quad (7)$$

Due to the symmetry, the potential of electrode C is opposite to that of the of the potential of electrode B, as follows:  $\varphi_C = -\varphi_B$ . Potential  $\varphi_B$ , or potential  $\varphi_C$  are defined along the axes of voltage measurement electrodes B and C at the points that touch the soil-air boundary (Figure 2b). However, it is necessary to bear in mind that the potential should be determined by the mean potential method, because according to Expression (4), the potential changes along the length of the axis of the voltage electrode. Apparently this statement is confusing because all the points on the ideal conductor under electrostatic conditions are located at the same potential. In order for all the points on voltage electrodes to be at the same potential, it would be necessary to perform the method of images from the cylindrical boundary, i.e. current electrodes from the surface of the voltage electrodes. However, since the length of the voltage measurement electrodes is finite, in such case it is difficult to perform the method of images. By ignoring the image of the current electrodes from the voltage measurement electrodes, the buried part (conductor) of the voltage measurement electrodes intersect with various equipotential curves caused by the current electrodes (Figure 2b). Although all the points on an ideal conductor in a static field are of an equal potential, mathematically it is not simple to determine the value of this potential. In such cases, insofar as possible, the mean potential method is used. The **mean potential value** represents an unbiased assessment of the potential of the buried part of the voltage measurement electrode.

Let us say that the length of the current measurement electrodes is  $l$  and the voltage measurement electrodes is  $d$  (Figure 2a).

Then the mean potential at the site of the voltage electrode B due to the current conglomerate of electrode A and its image in Area a, and the conglomerate of current electrode D and its image in Area a is as follows:

The mean potential of electrode B, due to the currents from conglomerates of the original electrode A, which is located in Area b and its imaginary image that is located in Area a, and the conglomerates of the original electrode D, which is located in Area b and its imaginary image that is located in Area a, is as follows:

Umjesto rješavanja integrala u izrazu (7), za kojeg postoji analitičko rješenje, prikladnije je ishoditi numeričko rješenje, tj. provesti numeričku integraciju. Kako je podintegralna funkcija glatka funkcija, umjesto složenijih postupaka numeričkih integracija (Trapezno pravilo, Simpsonovo pravilo, Romberg) prikladnije je provesti jednostavnu integraciju prema pravokutnom pravilu [9]:

Instead of solving the integral in Expression (7), for which there is an analytical solution, it is more appropriate to obtain a numerical solution, i.e. to perform numerical integration. Since the subintegral function is a smooth function, instead of more complex procedures of numerical integration (the trapezoidal, Simpson and Romberg rules), it is more appropriate to perform a simple integration according to the rectangular rule [9]:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \frac{x_2 - x_1}{M} \sum_{m=1}^M f(x_1 + m \cdot \Delta) + O(\Delta), \quad \Delta = \frac{x_2 - x_1}{M}, \quad (8)$$

gdje je:

- $\Delta$  – korak tj., prostorna udaljenost između dvije susjedne točke u kojima se uzima uzorak funkcije  $f(x)$ , a koji se nalazi na krivulji integriranja,  $x_1$  i  $x_2$  početna i krajnja točka duž krivulje na kojoj se integrira funkcija  $f(x)$ ,
- $O(\Delta)$  – numerička pogreška integracije, tj. odstupanje od točne vrijednosti integrala,
- $M$  – broj uzoraka funkcije na intervalu između točaka  $x_1$  i  $x_2$ .

Naravno, zbog jednostavnije sheme numeričkog integriranja potreban je nešto veći broj uzoraka  $M$  funkcije  $f(x)$ , ali je iskazivanje rješenja analitičkim izrazom olakšano.

Primjenom izraza (8) na izraz (7) srednji potencijal elektrode B zbog konglomerata originalnih strujnih elektroda A i D, koje se nalaze u području b i njihovih zamišljenih slika koje se nalaze u području a glasi:

where:

- $\Delta$  – step, i.e. the spatial distance between two neighboring points in which a sample of function  $f(x)$  is taken, which is on the integration curve,  $x_1$  and  $x_2$  the initial and final points along the curve on which the function  $f(x)$  is integrated,
- $O(\Delta)$  – the numerical integration error, i.e. the deviation from the precise value of the integral,
- $M$  – the number of the samples of the function between points  $x_1$  and  $x_2$ .

Naturally, due to the simpler scheme of numerical integration, a somewhat larger number of samples of the  $M$  function  $f(x)$  are required, but the presentation of the solution is easier with the analytical expression.

By applying Expression (8) to Expression (7), the mean potential of electrode B, due to the conglomerate of the original current electrodes A and D, which are located in Area b and their imaginary images that are located in Area a, is as follows:

$$\bar{\varphi}_B^{ab} = \frac{I \rho_e}{4 \pi l} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \ln \left( \frac{\Delta m + l + \sqrt{(x+l)^2 + a^2}}{\Delta m - l + \sqrt{(x-l)^2 + a^2}} \cdot \frac{\Delta m - l + \sqrt{(x-l)^2 + (2a)^2}}{\Delta m + l + \sqrt{(x+l)^2 + (2a)^2}} \right), \quad (9)$$

gdje je korak  $\Delta$  duž osi naponske mjerne elektrode B dan izrazom:

where step  $\Delta$  along the axis of the voltage measurement electrode B is given with the following expression:

$$\Delta = \frac{d}{M-1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1, \quad (10)$$

u kojemu je:

- $d$  – duljina ukopanog dijela naponske mjerne elektrode B,
- $M$  – broj uzoraka, tj. točaka promatranja potencijala, a koje se nalaze na uzdužnoj osi ukopanog dijela naponske elektrode B.

U dvoslojnom tlu situacija je nešto složenija, jer na potencijal naponske mjerne elektrode utječu zamišljene slike zbog višestrukih odslikavanja, a koje se nalaze u područjima a i c. Utjecaj slika strujnih elektroda A i D u područjima a i c može se uvažiti neovisno te se u konačnom izrazu za potencijal algebarski zbrajaju zajedno s potencijalom određenim izrazom (9). Srednji potencijal zbog slika iz područja a prema izrazu (8) iznosi:

in which:

- $d$  – the length of the buried part of voltage measurement electrode B,
- $M$  – the number of samples, i.e. the points in which potential is observed, which are located on the longitudinal axis of the buried part of charge electrode B.

In two-layer soil, the situation is somewhat more complex because the potential of the voltage measurement electrode is influenced by the imaginary image due to multiple image sources, which are located in Areas a and c. The influence of the images of the current electrodes A and D in Areas a and c can be considered independently and in the final expression for the potential, they are summed algebraically together with the potential defined by Expression (9). The mean potential due to the image from Area a according to Expression (8) is as follows:

---

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{d} \int_{2nh}^{2nh+d} \varphi(x, y) dx, \text{ tj. } \bar{\varphi} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \varphi(x = 2nh + \Delta m, y) \quad (11)$$

---

Srednji potencijal zbog zamišljenih slika iz područja c prema izrazu (8) iznosi:

The mean potential due to the imaginary images from Area c according to Expression (8) is as follows:

---

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{d} \int_{2nh-d}^{2nh} \varphi(x, y) dx, \text{ tj. } \bar{\varphi} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \varphi(x = 2nh - d + \Delta m, y), \quad (12)$$

---

ili prema:

or according to:

---

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \varphi(x = 2nh - \Delta m, y). \quad (13)$$

---

Da bi se mogao odrediti izraz za srednji potencijal naponskih mjernih elektroda prema posljednjim izrazima potrebno je odrediti analitički oblik izraza za potencijal  $\varphi(x, y)$  u dvoslojnom tlu za područje b, u kojemu se nalaze naponske mjerne elektrode, a zbog odslikanih strujnih elektroda A i D, koje se nalaze u područjima a i c. Potencijal u području b, na granici tlo-zrak na mjestu naponske mjerne elektrode B u točki  $T_1$  prema slici 2b, a zbog uvažanih  $N$  slika strujnih elektroda A i D koje se nalaze u području a glasi:

In order to define the expression for the mean potential of the voltage measurement electrodes according to the previous expressions, it is necessary to define the analytical form of the expression for potential  $\varphi(x, y)$  in two-layer soil for Area b, in which the voltage measurement electrodes are located, and due to the images of current electrodes A and D, which are located in Areas a and c. The potential in Area b, at the soil-air boundary at the site of the voltage measurement electrode B in point  $T_1$  according to Figure 2b, and due to  $N$  images of the current electrodes A and D that are located in Area a, which are taken into consideration, is as follows:

$$\varphi_b^a = \frac{I\rho_g}{4\pi l} \sum_{n=1}^N \beta^n \left( \begin{array}{c} \ln \frac{(2nh+l) + \sqrt{(2nh+l)^2 + a^2}}{(2nh-l) + \sqrt{(2nh-l)^2 + a^2}} + \\ \ln \frac{(2nh-l) + \sqrt{(2nh-l)^2 + (2a)^2}}{(2nh+l) + \sqrt{(2nh+l)^2 + (2a)^2}} \end{array} \right). \quad (14)$$

Potencijal u području b, na granici tlo-zrak na mjestu naponske mjerne elektroda B zbog slika strujnih elektroda A i D, koje se nalaze u području c glasi:

The potential in Area b, at the soil-air boundary at the site of voltage measurement electrode B due to the images of the current electrodes A and D, which are located in Area c, is as follows:

$$\varphi_b^c = \frac{I\rho_g}{4\pi l} \sum_{n=1}^N \beta^n \ln \left( \frac{(2nh+l) + \sqrt{(2nh+l)^2 + a^2}}{(2nh-l) + \sqrt{(2nh-l)^2 + a^2}} \cdot \frac{(2nh-l) + \sqrt{(2nh-l)^2 + (2a)^2}}{(2nh+l) + \sqrt{(2nh+l)^2 + (2a)^2}} \right). \quad (15)$$

Kao što se to može zapaziti izrazi (14) i (15) su identični, jer je potencijal određen u točki na granici tlo-zrak. Međutim, kada se potencijal određuje u bilo kojoj drugoj točki unutar područja b izrazi (14) i (15) će se razlikovati. Prema slici 2b izrazi (14) i (15) odnose se na potencijal u točki  $T_1$ . Ukoliko se prema navedenim izrazima potencijal određuje u točki  $T_2$ , tada je izraze (14) i (15) potrebno modificirati. U izrazu (14) umjesto  $2nh+l$  treba pisati  $2nh+l+d$ , a umjesto  $2nh-l$  treba pisati  $2nh-l+d$ . U izrazu (15) umjesto  $2nh+l$  treba pisati  $2nh+l-d$ , a umjesto  $2nh-l$  treba pisati  $2nh-l-d$ . Na temelju iznesene logike razmišljanja dolazi se do izraza za srednje potencijale elektrode B zbog slika strujnih elektroda A i D, koje se nalaze u područjima a i c, koji glase:

As can be observed, Expressions (14) and (15) are identical because the potential is defined at the point at the soil-air boundary. However, when the potential is defined at any other point within Area b, Expressions (14) and (15) will differ. According to Figure 2b, Expressions (14) and (15) refer to the potential at point  $T_1$ . If according to the cited expressions the potential is defined at point  $T_2$ , then Expressions (14) and (15) must be modified. In Expression (14), instead of  $2nh+l$  it is necessary to write  $2nh+l+d$ , and instead of  $2nh-l$  it is necessary to write  $2nh-l+d$ . In Expression (15), instead of  $2nh+l$  it is necessary to write  $2nh+l-d$ , and instead of  $2nh-l$  it is necessary to write  $2nh-l-d$ . Based upon the logic presented, the expression is obtained for the mean potential of electrode B due to the images of the current electrodes A and D, which are located in Areas a and c, as follows:

$$\bar{\varphi}_b^a = \frac{K}{M} \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^{M-1} \beta^n \left( \begin{array}{c} \ln \frac{2nh + \Delta m + l + \sqrt{(2nh + \Delta m + l)^2 + a^2}}{2nh + \Delta m - l + \sqrt{(2nh + \Delta m - l)^2 + a^2}} + \\ \ln \frac{2nh + \Delta m - l + \sqrt{(2nh + \Delta m - l)^2 + (2a)^2}}{2nh + \Delta m + l + \sqrt{(2nh + \Delta m + l)^2 + (2a)^2}} \end{array} \right), \quad (16)$$

$$\bar{\varphi}_b^c = \frac{K}{M} \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^{M-1} \beta^n \ln \left( \begin{array}{c} \frac{2nh - \Delta m + l + \sqrt{(2nh - \Delta m + l)^2 + a^2}}{2nh - \Delta m - l + \sqrt{(2nh - \Delta m - l)^2 + a^2}} \cdot \\ \frac{2nh - \Delta m - l + \sqrt{(2nh - \Delta m - l)^2 + (2a)^2}}{2nh - \Delta m + l + \sqrt{(2nh - \Delta m + l)^2 + (2a)^2}} \end{array} \right), \quad (17)$$

u kojima je  $K=I\rho_g/4\pi l$ , a korak  $\Delta$  određen izrazom (10).

in which  $K=I\rho_g/4\pi l$ , and step  $\Delta$  is defined by Expression (10).

Ukupni srednji potencijal zbog zamišljenih slika elektroda A i D koje se nalaze u područjima a i c te konglomerata strujnih elektroda A i D s njihovom slikama koje se nalaze području a, jednak je zbroju srednjih potencijala  $\bar{\varphi}_a^c$  i  $\bar{\varphi}_B^c$  sa  $\bar{\varphi}_B^b$ . Takav bi izraz zbog svoje duljine postao nepregledan, a ujedno ne bi bio prilagođen za pisanje programa za računalo korištenjem programskih petlji. Naime, treba imati na umu da **izraz treba svesti na takvu formu koja je prikladna za pisanje programa na računalu**, pogotovo za korištenje programskih petlji.

Srećom, moguće je napisati jezgrovitiji izraz za srednji potencijal zbog slika iz područja a i c, a koji je istodobno prikladan za pisanje programa za osobno računalo (PC) te on glasi:

The total mean potential due to the imaginary images of electrodes A and D in Areas a and c and the conglomerate of current electrodes A and D with their images located in Area a, is equal to the sum of the mean potentials  $\bar{\varphi}_a^c$  and  $\bar{\varphi}_B^c$  with  $\bar{\varphi}_B^b$ . Due to the length of such an expression, it is not easy to comprehend and would not be suitable for writing programs for a computer using program loops. It is necessary to bear in mind that **an expression must be reduced to a form that is suitable for writing programs on a computer**, especially for using program loops.

Fortunately, it is possible to write a more concise expression for mean potential due to the images from Areas a and c, which at the same time is suitable for writing programs for a personal computer, as follows:

$$\bar{\varphi}_n^c = \frac{K}{M} \sum_{m=1}^N \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{k=0}^1 \beta^k \left( \frac{\ln \frac{2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k + l + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k + l)^2 + a^2}}{2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k - l + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k - l)^2 + a^2}}}{\ln \frac{2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k - l + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k - l)^2 + (2a)^2}}{2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k + l + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k + l)^2 + (2a)^2}}} \right) \quad (18)$$

Kratkim osvrtom na prethodni izraz uočavaju se slični članovi u razlomku pod logaritmom, što otvara mogućnost daljnjeg sažimanja dobivenog izraza na još jezgrovitiji oblik:

Briefly reviewing the previous expression, it is evident that there are similar articles in the fraction under the logarithm, thereby opening the possibility for further reduction of the expression obtained into an even more concise form:

$$\bar{\varphi}_n^c = \frac{K}{M} \sum_{m=1}^N \beta^k \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{k=0}^1 \ln \prod_{l=0}^1 \frac{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k + (-1)^l l + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k + (-1)^l l)^2 + 2^l a^2}}{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k - (-1)^l l + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k - (-1)^l l)^2 + 2^l a^2}} \quad (19)$$

Ukoliko se u konačnom izrazu za potencijal namjerava koristiti jednadžba za srednji potencijal u obliku prikazanom jednadžbom (19), tada je jednadžbu (9) potrebno svesti na takav oblik, tj.:

If it is intended to use an equation for the mean potential in the form presented by equation (19) in the final expression for potential, then Expression (9) must be reduced to such a form, i.e.:

$$\bar{\varphi}_n = \frac{K}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \ln \prod_{l=0}^1 \frac{\Delta \cdot m + (-1)^l l + \sqrt{(\Delta \cdot m + (-1)^l l)^2 + 2^l a^2}}{\Delta \cdot m - (-1)^l l + \sqrt{(\Delta \cdot m - (-1)^l l)^2 + 2^l a^2}} \quad (20)$$

Ukupni srednji potencijal naponske mjerne elektrode B iznosi:

The total mean potential of the voltage measurement electrode B amounts to:

$$\bar{\varphi}_n = \frac{K}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \left[ \ln \prod_{l=0}^1 \frac{\Delta \cdot m + (-1)^l l + \sqrt{(\Delta \cdot m + (-1)^l l)^2 + 2^l a^2}}{\Delta \cdot m - (-1)^l l + \sqrt{(\Delta \cdot m - (-1)^l l)^2 + 2^l a^2}} + \sum_{k=0}^1 \beta^k \sum_{n=0}^1 \ln \prod_{l=0}^1 \frac{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k + (-1)^l l + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k + (-1)^l l)^2 + 2^l a^2}}{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k - (-1)^l l + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^k - (-1)^l l)^2 + 2^l a^2}} \right] \quad (21)$$

Kako je zbog geometrijske i električne simetrije (slika 2a) potencijal elektrode C suprotnog predznaka od potencijala elektrode B, a time i srednji potencijal, tj.  $\bar{\varphi}_C = -\bar{\varphi}_B$ , napon  $\bar{U}_{BC}$  između naponskih elektroda B i C, mjereno voltmetrom (slika 1) iznosi  $\bar{U}_V = \bar{U}_{BC} = 2\bar{\varphi}_B$ , a iskazan geometrijom mjernog spoja glasi:

Since due to geometric and electrical symmetry (Figure 2a), the potential of electrode C is of the opposite sign of the potential of electrode B, and thereby the mean potential, i.e.  $\bar{\varphi}_C = -\bar{\varphi}_B$ , then voltage  $\bar{U}_{BC}$  between voltage electrodes B and C measured with a voltmeter (Figure 1) amounts to  $\bar{U}_V = \bar{U}_{BC} = 2\bar{\varphi}_B$ , and expressed by the geometry of the measurement circuit is as follows:

$$\bar{U}_{BC} = \frac{2K}{M} \sum_{m=1}^{M-1} \left[ \ln \prod_{l=0}^l \frac{\Delta \cdot m + (-1)^l l + \sqrt{(\Delta \cdot m + (-1)^l l)^2 + 2^l a^2}}{\Delta \cdot m - (-1)^l l + \sqrt{(\Delta \cdot m - (-1)^l l)^2 + 2^l a^2}} + \sum_{n=1}^N \beta^n \sum_{l=0}^l \ln \prod_{i=0}^i \frac{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^i + (-1)^l l) + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^i + (-1)^l l)^2 + 2^l a^2}}{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^i - (-1)^l l) + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^i - (-1)^l l)^2 + 2^l a^2}} \right] \quad (22)$$

Ukoliko je iz nekog razloga prikladnija proširenija forma, napon  $\bar{U}_{BC}$  glasi:

If for some reason an expanded form is more suitable,  $\bar{U}_{BC}$  is as follows:

$$\bar{U}_{BC} = \frac{2K}{M} \sum_{m=1}^{M-1} \left[ \ln \frac{\Delta \cdot m + l + \sqrt{(x+l)^2 + a^2}}{\Delta \cdot m - l + \sqrt{(x-l)^2 + a^2}} \frac{\Delta \cdot m - l + \sqrt{(x-l)^2 + (2a)^2}}{\Delta \cdot m + l + \sqrt{(x+l)^2 + (2a)^2}} + \sum_{n=1}^N \beta^n \ln \frac{2nh + \Delta \cdot m + l + \sqrt{(2nh + \Delta \cdot m + l)^2 + a^2}}{2nh + \Delta \cdot m - l + \sqrt{(2nh + \Delta \cdot m - l)^2 + a^2}} \frac{2nh + \Delta \cdot m - l + \sqrt{(2nh + \Delta \cdot m - l)^2 + (2a)^2}}{2nh + \Delta \cdot m + l + \sqrt{(2nh + \Delta \cdot m + l)^2 + (2a)^2}} + \sum_{n=1}^N \beta^n \ln \frac{2nh - \Delta \cdot m + l + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m + l)^2 + a^2}}{2nh - \Delta \cdot m - l + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m - l)^2 + a^2}} \frac{2nh - \Delta \cdot m - l + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m - l)^2 + (2a)^2}}{2nh - \Delta \cdot m + l + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m + l)^2 + (2a)^2}} \right] \quad (23)$$

Jednom određen napon  $U_{BC} = \bar{U}_{BC}$  iskazan geometrijom mjernog spoja omogućava određivanje izraza za prividni specifični električni otpor  $\rho(a)$  za svaku pojedinu mjernu tehniku, tj. raspored elektroda. Prividni specifični otpor tla  $\rho(a)$  iskazan geometrijskim faktorom  $F$  po definiciji glasi:

Once voltage  $U_{BC} = \bar{U}_{BC}$  is determined, expressed by the geometry of the measurement circuit, it is possible to determine an expression for apparent soil resistivity  $\rho(a)$  for each individual measurement technique, i.e. electrode arrangement. Apparent soil resistivity  $\rho(a)$  expressed by the geometric factor  $F$  is by definition as follows:

$$\rho(a) = \frac{U_V}{I} \frac{1}{F} = \frac{U_{BC}}{I} \frac{1}{F} \quad (24)$$

Kada je tlo homogeno, tada prividni specifični otpor tla  $\rho(a)$  ne ovisi o razmaku elektroda, te je on jednak specifičnom otporu tla gornjeg sloja tla, tj.  $\rho(a) = \rho_g$ , odnosno vrijedi:

When the soil is homogeneous, the apparent soil resistivity  $\rho(a)$  does not depend upon the distance between the electrodes and is equal to the soil resistivity of the upper soil layer, i.e.  $\rho(a) = \rho_g$ , or:

$$\rho(a) = \rho_g = \frac{U_{BC}}{I} \frac{1}{F} \quad (25)$$

Odatle je:

Thus:

$$F = \frac{1}{\rho_g} \frac{U_{BC}}{I} \quad (26)$$

Kada je specifični električni otpor gornjeg sloja tla  $\rho_g$  jednak specifičnom električnom otporu donjeg sloja tla  $\rho_d$  tada je koeficijent odslikavanja  $\beta$  jednak nuli. Tada u jednadžbi (22) za napon  $U_{BC}$  otpada član uz  $\beta$ , te se dobiva izraz za napon  $\bar{U}_{BC}$  kada je tlo jednoslojno te on glasi:

When the specific resistivity of the upper soil layer  $\rho_g$  equals the resistivity of the lower soil layer  $\rho_d$ , the reflection coefficient (reflection factor)  $\beta$  equals zero. Thus, in equation (22) for voltage  $U_{BC}$  the article next to  $\beta$  is eliminated and the expression  $\bar{U}_{BC}$  is obtained for a one-layer soil, as follows:

$$\bar{U}_{BC} = \frac{2K}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \ln \prod_{i=0}^1 \frac{\Delta \cdot m + (-1)^i l + \sqrt{(\Delta \cdot m + (-1)^i l)^2 + 2^i a^2}}{\Delta \cdot m - (-1)^i l + \sqrt{(\Delta \cdot m - (-1)^i l)^2 + 2^i a^2}} \quad (27)$$

Uvrštavanjem dobivenog izraza (27) u jednadžbu (26) dobiva se:

By including the obtained Expression (27) in Expression (26), the following is obtained:

$$F = \frac{1}{2\pi l} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \ln \prod_{i=0}^1 \frac{\Delta \cdot m + (-1)^i l + \sqrt{(\Delta \cdot m + (-1)^i l)^2 + 2^i a^2}}{\Delta \cdot m - (-1)^i l + \sqrt{(\Delta \cdot m - (-1)^i l)^2 + 2^i a^2}} \quad (28)$$

ili u obliku:

or in the following form:

$$F^{-1} = 2\pi l \cdot M \left( \sum_{m=0}^{M-1} \ln \prod_{i=0}^1 \frac{\Delta \cdot m + (-1)^i l + \sqrt{(\Delta \cdot m + (-1)^i l)^2 + 2^i a^2}}{\Delta \cdot m - (-1)^i l + \sqrt{(\Delta \cdot m - (-1)^i l)^2 + 2^i a^2}} \right)^{-1} = 2\pi l \cdot M \cdot C^{-1} \quad (29)$$

gdje je novi geometrijski faktor  $C$  dan izrazom:

where the new geometric factor  $C$  is given by the following expression:

$$C = \sum_{m=0}^{M-1} \ln \prod_{i=0}^1 \frac{\Delta \cdot m + (-1)^i l + \sqrt{(\Delta \cdot m + (-1)^i l)^2 + 2^i a^2}}{\Delta \cdot m - (-1)^i l + \sqrt{(\Delta \cdot m - (-1)^i l)^2 + 2^i a^2}} \quad (30)$$

Sada je moguće korištenjem izraza (22), (24) i (29) odrediti prividni specifični električni otpor dvoslojnog tla u slučaju kada je uvažena duljina strujnih i naponskih mjernih elektroda:

Using Expressions (22), (24) and (29), it is now possible to determine the apparent resistivity of two-layer soil when the lengths of the current and voltage measurement electrodes are taken into account:

$$\rho(a) = \rho_g \left( 1 + C^{-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \beta^n \sum_{i=0}^1 \ln \prod_{j=0}^1 \frac{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^j + (-1)^i l) + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^j + (-1)^i l)^2 + 2^i a^2}}{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^j - (-1)^i l) + \sqrt{(2nh - \Delta \cdot m \cdot (-1)^j - (-1)^i l)^2 + 2^i a^2}} \right) \quad (31)$$



gdje je koeficijent odslikavanja  $\beta$  dan izrazom:

where the imaging coefficient  $\beta$  is given by the following expression:

$$\beta = \frac{\rho_d - \rho_g}{\rho_d + \rho_g} \quad (32)$$

Dobiveni izraz je **najtočniji izraz** kojim se određuje prividni specifični otpor tla mjeren Wennerovim spojem. Vrijedi kako za male razlike između elektroda  $a < l$ , tako i obrnuto  $l > a$ , odnosno, vrijedi za sve razmake mjernih elektroda, jer je uvažen utjecaj stvarne geometrije strujnih elektroda za određivanje napona  $U_{BC}$ . Zbog svoje točnosti dobiveni izraz će se smatrati referentnim izrazom, uz pomoć kojeg će se provjeravati točnost izraza za prividni specifični otpor tla prema IEEE normi. **Jedina pretpostavka, a time i ograničenje pri korištenju dobivenog izraza je da mjerne elektrode ne prodiru u donji sloj tla.**

The expression obtained is the **most precise expression** with which apparent soil resistivity is determined when measured by the Wenner method. It applies for small differences between electrodes  $a < l$ , as well as the reverse  $l > a$ , i.e. it is valid for all spacing between measurement electrodes, because the influence of the actual geometry of the current electrodes for determining voltage  $U_{BC}$  is taken into account. Due to the precision of the expression obtained, it will be considered as a reference expression, according to which the precision of the expression for apparent soil resistivity according to the IEEE standard will be checked. **The only assumption, and thereby limitation, in using the obtained expression is that the measurement electrodes do not penetrate into the lower soil layer.**

Međunarodnom normom IEEE Std. 81-1983 [1], prividni otpor tla određuje se izrazom:

With the international IEEE Std. 81-1983 [1], apparent soil resistivity is determined with the following expression:

$$\rho(a) = \rho_s \left[ 1 + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2nh}{a}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{4 + \left(\frac{2nh}{a}\right)^2}} \right) \right] \quad (33)$$

koji je izveden pod pretpostavkom da se štapne elektrode mogu zamijeniti s kuglastim. Izraz (33) ima upitnu točnost za male razmake između elektroda, tj. kada je  $a < l$ . O tome kolika će pogreška tada nastupiti bit će jasno iz numeričkih primjera.

that is derived under the assumption that rod electrodes can be replaced with spherical electrodes. Expression (33) has doubtful precision for small spaces between electrodes, i.e. when  $a < l$ . The extent of the error occurring then will be clear from numerical examples.

## 5 NUMERIČKI PRIMJERI

Korištenjem izraza (31) za prividni specifični električni otpor dvoslojnog tla moguće je na numeričkom primjeru lako utvrditi granice valjanosti i pogrešku koja nastaje korištenjem pojednostavljenog izraza prema međunarodnoj normi (33) [1] za različite slučajeve koji mogu nastupiti u praksi.

Kao što je to i uobičajeno granice valjanosti nekog izraza i/ili modela umjesto matematičkog dokaza najlakše je utvrditi uspoređujući dobivene rezultate s točnim modelom. Neka kao primjer posluži slučaj kada je tlo dvoslojno, debljina gornjeg sloja iznosi 1 m, 2 m i 5 m, njegov specifični električni otpor  $200 \Omega\text{m}$  ( $\rho_g = 200 \Omega\text{m}$ ). Donji sloj tla neka ima specifični električni otpor  $100 \Omega\text{m}$  ( $\rho_d = 100 \Omega\text{m}$ ), te se proteže u beskonačnost. Neka su sve četiri elektrode mjernog spoja (sonde) jednake kao i njihov ukopani dio. Duljina ukopanog dijela mjernih elektroda iznosi 0,4 m ( $l = d = 0,4 \text{ m}$ ).

Za očekivati je da će najveća pogreška pri određivanju specifičnog električnog otpora tla teorijskim modelom koji nadomješta štapne elektrode s kuglastim nastupiti pri malim razmacima između strujnih elektroda, tj. kada je udaljenost  $a$  između susjednih elektroda mjerljiva s duljinom strujnih i/ili naponskih mjernih elektroda. Iz tog razloga analiza je ograničena na promatranje krivulje prividnog specifičnog električnog otpora za male razmake između susjednih elektroda koje iznosi proizvoljno 10 m. Promatra se slučaj kada je duljina cijelog ožičenja mjernog spoja 30 m (slika 1). Pogreška će ovisiti o nekoliko parametara: debljini gornjeg sloja tla, specifičnom električnom otporu gornjeg sloja tla, specifičnom električnom otporu donjeg sloja tla, duljini naponskih mjernih elektroda te duljini strujnih mjernih elektroda i naravno o udaljenosti između susjednih elektroda.

Slika 5 prikazuje krivulje prividnih specifičnih otpora tla u funkciji udaljenosti između susjednih elektroda. Krivulja prividnog specifičnog otpora tla dobivena prema izrazu (31) prikazana je crvenom bojom, a ona dobivena prema IEEE normi tj. prema izrazu (33) prikazana je plavom bojom. Specifični otpor gornjeg sloja tla iznosi  $\rho_g = 200 \Omega\text{m}$ , njegova debljina  $h = 1 \text{ m}$ , a specifični otpor donjeg sloja tla  $\rho_d = 100 \Omega\text{m}$ . Brojevi iteracija su  $M = 5$  i  $N = 20$ .

## 5 NUMERICAL EXAMPLES

By using Expression (31) for the apparent resistivity of two-layer soil, it is easily possible to determine the validity limits and error that occur on the numerical example when using the simplified expression according to the international standard (33) [1] for various instances that occur in practice.

As is usually the case, the validity limits of an expression and/or model instead of a mathematical proof can most easily be determined by comparing the results obtained with a precise model. A case in which the soil is two-layer, the thickness of the soil is 1 m, 2 m and 5 m; and its resistivity is  $200 \Omega\text{m}$  ( $\rho_g = 200 \Omega\text{m}$ ) is used as an example. Let the lower soil layer have a resistivity of  $100 \Omega\text{m}$  ( $\rho_d = 100 \Omega\text{m}$ ) and extend to infinity. Let all four electrodes (probes) of the measurement circuit be equal, as well as their buried part. The length of the buried part of the measurement electrodes amounts to 0,4 m ( $l = d = 0,4 \text{ m}$ ).

It is to be expected that the greatest error in determining the soil resistivity with a theoretical model that replaces rod electrodes with spherical ones will occur when the spacing between the current electrodes is small, i.e. when distance  $a$  between neighboring electrodes is approximately the same length of the current and/or voltage measurement electrodes. For this reason, analysis is limited to studying the apparent resistivity curve for small spaces between neighboring electrodes that arbitrarily amount to 10 m. A case is studied when the length of the entire wiring of the measurement circuit is 30 m (Figure 1). The error will depend upon several parameters: the thickness of the upper soil layer, the resistivity of the upper soil layer, the resistivity of the lower soil layer, the length of the voltage measurement electrodes and the length of the current measurement electrodes and, naturally, the distance between neighboring electrodes.

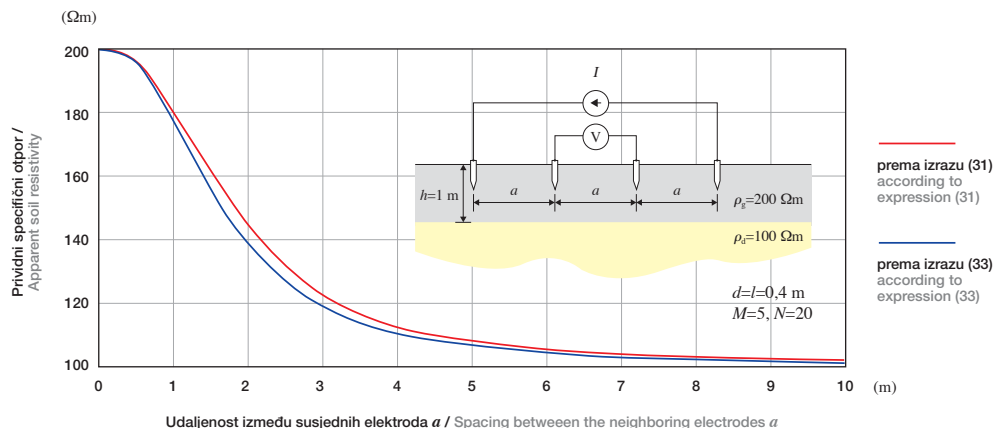
Figure 5 presents apparent soil resistivity curves as functions of the distance between the neighboring electrodes. The apparent soil resistivity curve obtained according to Expression (31) is shown in red, and that obtained according to the IEEE standard, i.e. according to Expression (33), is shown in blue. The resistivity of the upper soil layer amounts to  $\rho_g = 200 \Omega\text{m}$ , its thickness is  $h = 1 \text{ m}$ , and the resistivity of the lower soil layer is  $\rho_d = 100 \Omega\text{m}$ . The number of iterations are  $M = 5$  and  $N = 20$ .

### Slika 5

Prividni specifični otpor tla prema izrazima (31) i (33)

### Figure 5

Apparent soil resistivity according to expressions (31) and (33)



Na slici 6 prikazana je krivulja postotne pogreške u određivanju prividnog specifičnog otpora tla prema IEEE normi, tj. prema izrazu (33) u odnosu na izraz (31), u funkciji razmaka između susjednih elektroda za parametre tla prema slici 5.

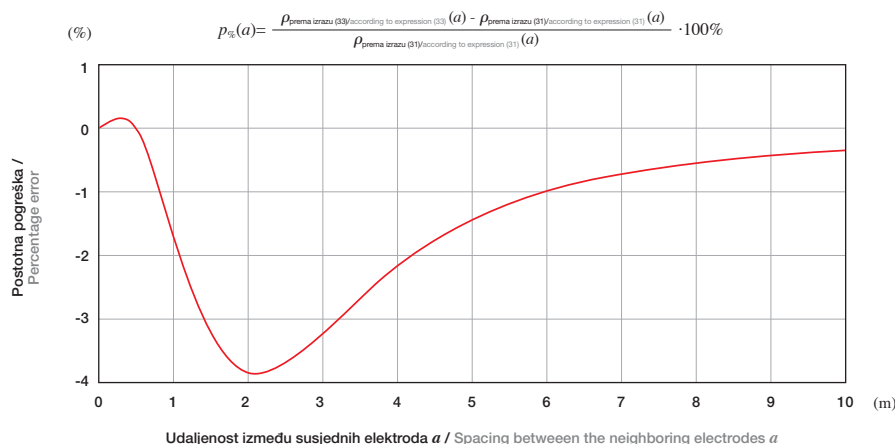
In Figure 6, the percentage error curve is shown when apparent soil resistivity is determined according to the IEEE standard, i.e. according to Expression (33), in comparison to Expression (31), in the function of the distance between the neighboring electrodes for soil parameters according to Figure 5.

### Slika 6

Postotna pogreška IEEE izraza u određivanju prividnog specifičnog otpora

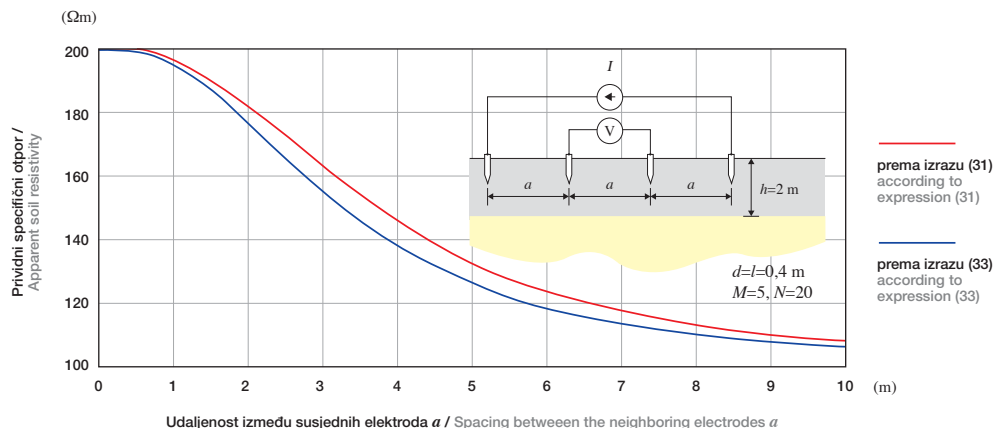
### Figure 6

Percentage error of the IEEE expression in determining apparent resistivity



Slika 7 prikazuje krivulje prividnih specifičnih otpora tla u funkciji udaljenosti između susjednih elektroda. Krivulja prividnog specifičnog otpora tla dobivena prema izrazu (31) prikazana je crvenom bojom, a ona dobivena prema IEEE normi, tj. prema izrazu (33) prikazana je plavom bojom. Specifični otpor gornjeg sloja tla iznosi  $\rho_g = 200 \Omega\text{m}$ , njegova debljina  $h = 2 \text{ m}$ , a specifični otpor donjeg sloja tla  $\rho_d = 100 \Omega\text{m}$ .

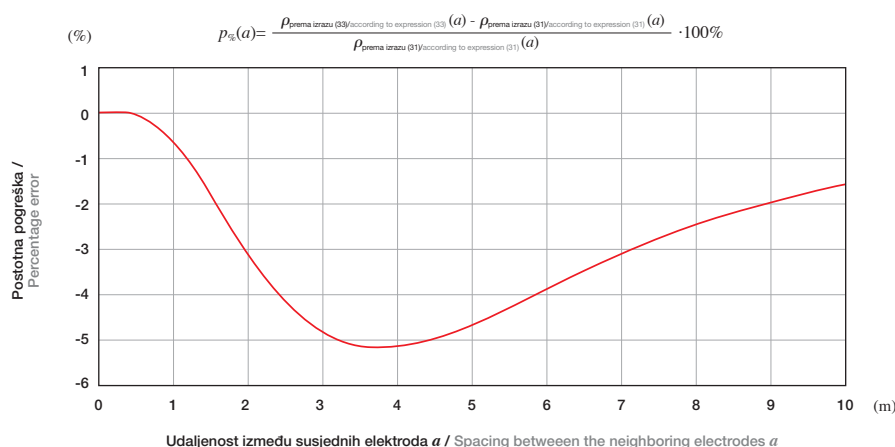
Figure 7 shows the apparent soil resistivity curves the functions of the distance between neighboring electrodes. The apparent soil resistivity curve obtained according to Expression (31) is shown in red and that obtained according to the IEEE standard, i.e. according to Expression (33), is shown in blue. The resistivity of the upper soil layer amounts to  $\rho_g = 200 \Omega\text{m}$ , its thickness is  $h = 2 \text{ m}$ , and the resistivity of the lower soil layer is  $\rho_d = 100 \Omega\text{m}$ .



**Slika 7**  
 Prividni specifični otpor tla prema izrazima (31) i (33)  
**Figure 7**  
 Apparent soil resistivity according to Expressions (31) and (33)

Na slici 8 prikazana je krivulja postotne pogreške u određivanju prividnog specifičnog otpora tla prema IEEE normi, tj. prema izrazu (33) u odnosu na izraz (31), u funkciji razmaka između susjednih elektroda za parametre tla prema slici 7.

In Figure 8, the percentage error curve is shown in the determination of apparent soil resistivity according to the IEEE standard, i.e. according to Expression (33) in relation to Expression (31), as the function of the distance between the neighboring electrodes for the soil parameters according to Figure 7.



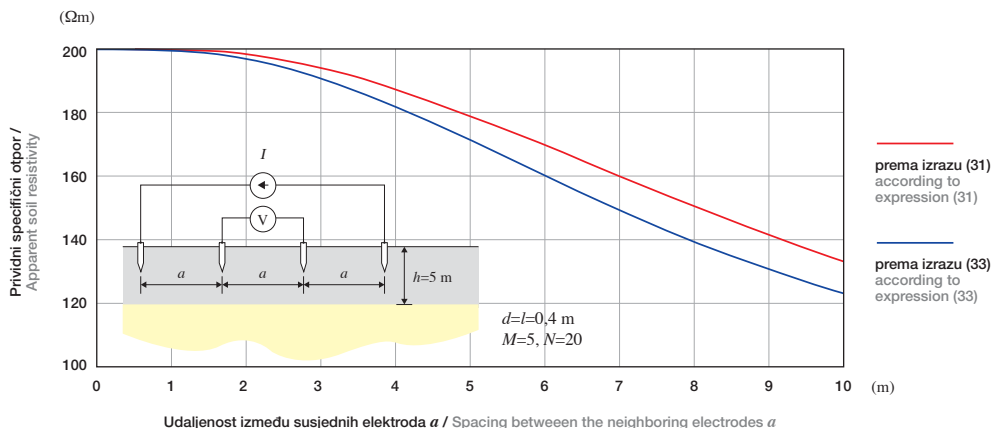
**Slika 8**  
 Postotna pogreška IEEE izraza u određivanju prividnog specifičnog otpora  
**Figure 8**  
 Percentage error of the IEEE expression in comparison to apparent resistivity

Slika 9 prikazuje krivulje prividnih specifičnih otpora tla u funkciji udaljenosti između susjednih elektroda. Krivulja prividnog specifičnog otpora tla dobivena prema izrazu (31) prikazana je crvenom bojom, a ona dobivena prema IEEE normi, tj. prema izrazu (33) prikazana je plavom bojom. Specifični otpor gornjeg sloja tla iznosi  $\rho_g = 200 \Omega\text{m}$ , njegova debljina  $h = 5 \text{ m}$ , a specifični otpor donjeg sloja tla  $\rho_d = 100 \Omega\text{m}$ .

Figure 9 presents apparent soil resistivity curves as functions of the distance between neighboring electrodes. The apparent soil resistivity curve obtained according to Expression (31) is shown in red, and the one obtained according to IEEE standard, i.e. according to Expression (33), is shown in blue. The resistivity of the upper soil layer amounts to  $\rho_g = 200 \Omega\text{m}$ , its thickness is  $h = 5 \text{ m}$ , and the resistivity of the lower soil layer is  $\rho_d = 100 \Omega\text{m}$ .

**Slika 9**

Prividni specifični otpor tla prema izrazima (31) i (33)  
**Figure 9**  
 Apparent soil resistivity according to Expressions (31) and (33)

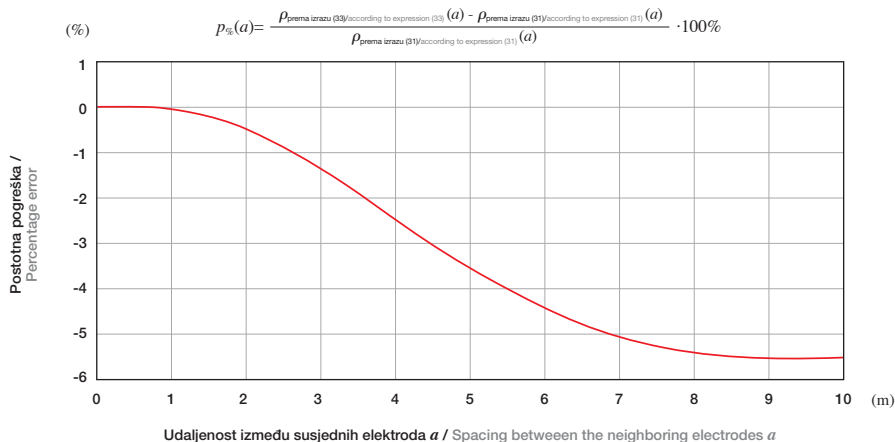


Na slici 10 prikazana je krivulja postotne pogreške u određivanju prividnog specifičnog otpora tla prema IEEE normi, tj. prema izrazu (33) u odnosu na izraz (31), u funkciji razmaka između susjednih elektroda za parametre tla prema slici 9.

In Figure 10, the percentage error curve in the determination of apparent soil resistivity according to the IEEE standard, i.e. according to Expression (33), is shown in comparison to Expression (31), as the function of the distance between the neighboring electrodes for the soil parameters according to Figure 9.

**Slika 10**

Postotna pogreška IEEE izraza u određivanju prividnog specifičnog otpora  
**Figure 10**  
 Percentage error of the IEEE expression in the determination of apparent resistivity



## 6 ANALIZA REZULTATA

Slike 6, 8 i 10 ukazuju da pogreška u određivanju prividnog specifičnog otpora tla prema izrazu (33) u odnosu na izraz (31) može biti pozitivna, ili negativna, ovisno od slučaja do slučaja.

Na slici 6 navedena pogreška pri vrlo malim razmacima između dvije susjedne elektrode je pozitivna, zatim naglo postaje negativna te maksimum pogreške nastupa kada je razmak između susjednih elektroda približno 2 m. Daljnjim povećanjem razmaka između susjednih elektroda pogreška se smanjuje te teži ka nuli. Ovako vladanje pogreške u određivanju prividnog specifičnog otpora tla prema izrazu (33) u odnosu na izraz (31) tipično je i za ostale analizirane slučajeve.

Kada su mjerne elektrode jako blizu ( $a \ll l$ ) jedna drugoj, tada na potencijal naponskih mjernih elektroda izraziti utjecaj imaju originalne strujne elektrode A i D, a njihove slike tek neznatan utjecaj. S obzirom da ekvipotencijalne krivulje u blizini strujnih elektroda imaju oblik elipse s jako izraženim ekscentritetom, jedna takva ekvipotencijalna krivulja prelazi preko uzdužne osi naponskih mjernih elektroda, te se s vrlo dobrom točnošću može uzeti da potencijal naponske mjerne elektrode odgovara tom potencijalu.

Daljnjim povećanjem udaljenosti između mjernih elektroda na iznos potencijala naponskih mjernih elektroda raste utjecaj zamišljenih odslikanih strujnih elektroda. Njihove ekvipotencijalne krivulje, koje su također oblika elipsi presijecaju uzdužnu os naponske mjerne elektrode u više točaka, što uzrokuje i pojavu maksimuma pogreške pri određivanju prividnog specifičnog otpora tla prema izrazu (33) u odnosu na izraz (31). Naime, prema izrazu (33) potencijal je određen samo u jednoj točki, a koja se nalazi na granici tlo-zrak, dok je prema izrazu (31) ona određena u više točaka metodom srednjeg potencijala.

Daljnje povećavanje udaljenosti između mjernih elektroda uzrokovat će smanjenje pogreške u određivanju prividnog specifičnog otpora tla prema izrazu (33) u odnosu na izraz (31). Naime, iako ekvipotencijalne krivulje oko štapnih elektroda imaju oblik elipse, kada su točke promatranja daleko od njih, ekvipotencijalne krivulje poprimaju oblik kružnice. Iz tog razloga kada je velik razmak između strujnih i naponskih elektroda potencijal se može s dobrom točnošću određivati izrazima za točkaste izvore polja, kod kojih su ekvipotencijalne krivulje oblika kružnice.

## 6 ANALYSIS OF THE RESULTS

Figures 6, 8 and 10 show that the error in the determination of apparent soil resistivity according to Expression (33) in comparison to Expression (31) can be positive or negative, depending on the particular case.

In Figure 6, the stated error when there are very small distances between two neighboring electrodes is positive, then suddenly becomes negative and the maximum error occurs when the distance between neighboring electrodes is approximately 2 m. With further increases in the distance between neighboring electrodes, the error decreases and tends toward zero. Such behavior of the error in the determination of apparent soil resistivity according to Expression (33) in comparison to Expression (31) is also typical for other cases analyzed.

When measurement electrodes are very close ( $a \ll l$ ) to each other, the original current electrodes A and D have a marked influence on the potential of the voltage measurement electrodes and their images have only an insignificant influence. Since the equipotential curves in the vicinity of the current electrodes have the form of an ellipse with marked eccentricity, one such equipotential curve crosses the longitudinal axis of the voltage measurement electrodes, and it can be said with very good precision that the potential of the voltage measurement electrode corresponds to this potential.

With further increases in the distance between the measurement electrodes, the influence of the imaginary images of the current electrodes upon the potential of the voltage measurement electrodes increases. Their equipotential curves, which are also in the form of an ellipse, cross the longitudinal axis of the voltage measurement electrode at several points, which also causes maximum error in the determination of apparent soil resistivity according to Expression (33) in comparison to Expression (31). According to Expression (33), the potential is determined at only one point, which is located at the soil-air boundary, while according to Expression (31) it is determined at several points using the mean potential method.

Further increases in the distance between the measurement electrodes will result in a reduction in error in the determination of soil resistivity according to Expression (33) in comparison to Expression (31). Although the equipotential curves in the vicinity of the rod electrodes have the form of an ellipse, when the observation points are distant from them, the equipotential curves acquire the form of a circle. For this reason, when there is a large distance between the current and voltage electrodes, the potential can be determined with good precision with the expressions for the point sources, where equipotential curves are of circular form.

Osim toga, zbog velike geometrijske udaljenosti odslikanih zamišljenih slika strujnih elektroda od naponskih elektroda, neznatna je promjena potencijala duž uzdužnih osi naponskih elektroda. Iz tog razloga nije velika razlika između potencijala određenog u jednoj točki na granici tlo-zrak, ili metodom srednjeg potencijala kada je velik razmak između mjernih elektroda. Zanimljivo je za primijetiti da maksimum pogreške nastupa kada je razmak između susjednih elektroda približno jednak dvostrukoj debljini gornjeg sloja tla.

Prve slike izvora polja elektroda A i D u područjima a i c imaju najveći doprinos korekciji potencijala, u prvom redu zbog njihove relativne blizine spram naponskih mjernih elektroda u odnosu na ostale slike, te neznatno oslabljene struje  $\beta I$ , koja se uvažava u računu. Ekvipotencijalne krivulje prvih slika elektroda A i D u područjima a i c na mjestu naponskih elektroda presijecaju uzdužnu os naponskih mjernih elektroda u više točaka (slika 2b). Navedeni utjecaj uvažan je korištenjem metode srednjeg potencijala. Kako su prve slike strujnih elektroda A i D udaljene od granice tlo-zrak upravo za dvostruku debljinu gornjeg sloja tla razumljiva je pojava maksimuma pogreške kada je razmak između susjednih elektroda jednak dvostrukoj debljini gornjeg sloja tla. Upravo pri tom razmaku najizraženiji je utjecaj prvih slika strujnih elektroda.

Zanimljivo je za primijetiti da je pogreška IEEE izraza prevladavajuće negativna. Razlog tome je što potencijal određen izrazom za štap logaritamski opada pri povećanju udaljenosti točaka promatranja od njegove uzdužne osi, a za kuglu, tj. točkaste izvore s kvadratom udaljenosti, odnosno pri malim udaljenostima, opada brže nego li za štap. Na taj način je potencijal izračunat izrazima za točkaste izvore polja pri istoj struji manji, te je iz tog razloga i specifični električni otpor niži.

## 7 ZAKLJUČAK

Iznenadujuće je da pogreška koja se dobiva korištenjem izraza iz IEEE norme nije prelazila 10 %, za brojne analizirane slučajeve, odnosno 6 % u prikazanim primjerima. **Na temelju ovog članka i njegovih rezultata neosporna i razvidna je svrhovitost uporabe IEEE izraza.** Autori su dali svoj doprinos u odgonetanju desetljećima stare zagonetke o točnosti IEEE izraza za prividni specifični električni otpor dvoslojnog tla. Ujedno, dan je alternativni izraz za određivanje prividnog specifičnog otpora dvoslojnog tla mjeren Wennerovim spojem, koji je prema trenutnim spoznajama autor jedinstven.

Moreover, due to the great geometric distance of the imaginary images of the current electrodes from the voltage electrodes, the change in potential is insignificant along the longitudinal axis of the voltage electrodes. For this reason, there is not a large difference between the potential determined at one point on the soil-air boundary or by the mean potential method when there is a great distance between the measurement electrodes. It is interesting that the maximum error occurs when the distance between neighboring electrodes is approximately twice the thickness of the upper soil layer.

The first images of the field sources of electrodes A and D in Areas a and c make the greatest contribution to the correction of the potential, in the first place due to their relative vicinity to the voltage measurement electrodes in comparison to the other images, and the insignificant reduction in current  $\beta I$ , which is taken into account in the calculation. The equipotential curves of the first images of electrodes A and D in Areas a and c at the site of the voltage electrodes cross the longitudinal axis of the voltage measurement electrodes at several points (Figure 2b). This influence is taken into account by using the mean potential method. Since the first images of current electrodes A and D are at a distance from the soil-air boundary of twice the thickness of the upper soil layer, the occurrence of the maximum error is understandable when the distance between the neighboring electrodes is equal to twice the thickness of the upper soil layer. It is precisely at this distance that the influence of the first images of the current electrodes is the most marked.

Interestingly, the error of the IEEE expression is predominantly negative. The reason for this is that the potential determined by the expression for the rod is logarithmically decreased with an increase in the distance of the observation point from its longitudinal axis, and for a sphere, i.e. point sources with the square of the distance or at small distances decreases more rapidly than for a rod. In this manner, the potential calculated with the expressions for point sources at the same current is lower, and for this reason the resistivity is lower.

## 7 CONCLUSION

It is surprising that the error obtained by using the expression from the IEEE standard did not exceed 10% in numerous cases analyzed, i.e. 6% in the examples presented. **Based upon this article and their results, the purpose of using the IEEE expression is indisputable and clear.** The authors have contributed to deciphering the decades-old enigma regarding the precision of the IEEE expression for the apparent resistivity of two-layer soil. An alternative expression

Iako je ovim člankom potvrđena primjenjivost IEEE izraza, to ne znači da svaki izraz predložen normom treba prihvatiti bez kritičkog osvrta. Naime, pri izdavanju normi i preporučenih izraza za uporabu treba imati na umu fizikalne pretpostavke pod kojim one vrijede, te ponekad i ograničenja matematičkog instrumentarija koji su uključeni u njihovu uporabu.

Iako se dobiveni izraz (31) za prividni specifični električni otpor, može činiti znatno složenijim od izraza (33) prema IEEE normi, treba imati na umu da se danas proračuni ove vrste odvijaju isključivo na osobnom računaru (PC). Iz tog razloga nešto složeniji izraz nije zapreka njegovoj uporabi, pogotovo ukoliko se ima na umu da je on svojom formom prilagođen pisanju programskih petlji, te je time programiranje elegantno.

Autori ovog članka se nadaju da će dobiveni alternativni izraz kao i prikazana metodologija uvažavanja stvarne geometrije elektroda i pri nekim drugim mjernim postupcima omogućiti zainteresiranim čitateljima da na beskompromisan način pristupaju svojim zadaćama.

has also been provided for the determination of the apparent resistivity of two-layer soil measured by the Wenner method, which is unique to the best knowledge of the authors.

Although this article affirms the applicability of the IEEE expression, this does not mean that every expression proposed by a standard should be accepted without critical examination. When assessing standards and recommended expressions for use, it is necessary to bear in mind the physical assumptions according to which they are valid, and sometimes the limitations of the mathematical instrumentation they use.

Although the obtained Expression (31) for apparent resistivity may seem significantly more complex than Expression (33) according to the IEEE standard, it should be remembered that calculations of this type are performed today exclusively on personal computers. For this reason, the somewhat greater complexity of the expression should not be an obstacle to its use, especially because its form has been adapted to writing program loops and elegant programming.

The authors of this article hope that the alternative expression and methodology presented, which take the actual geometry of electrodes and other measurement procedures into account, will help interested readers approach their tasks in an uncompromising manner.

---

## LITERATURA / REFERENCES

- [1] IEEE Std 81-1983, IEEE Guide for Measuring Earth Resistivity, Ground Impedance and Earth Surface Potentials of a Ground System, (Revision of IEEE Std. 81 -1962), The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., New York, 1983
- [2] WENNER, F., A Method for Measuring Earth Resistivity, Bureau of Standards scientific paper, 1915, No. 258, Washington, D.C., 1915
- [3] LAGACÉ, P. J., FORTIN, J., CRAINIC, E. D., Interpretation of Resistivity Sounding Measurements in N-Layer Soil using Electrostatic Images, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol.11, No. 3, July 1996
- [4] VAN NOSTRAND, R. G., COOK, K. L., Interpretation of Resistivity Data, Geological Survey professional paper 499, US Department of the Interior, Washington, D.C., 1966
- [5] HAZNADAR, Z., ŠTIH, Ž., Elektromagnetizam 1, Školska knjiga, Zagreb, 1997.
- [6] SENIOR, T. B. A., VOLAKIS, J. L., Approximate boundary conditions in electromagnetics, The Institution of electrical Engineers, London, 1995
- [7] BARIĆ, T., JOZSA, L., GLAVAŠ, H., Kapacitivni utjecaj visokonaponskih nadzemnih vodova na mjerenje specifičnog otpora tla, Energija, god. 56(2007), broj 2, Zagreb, 2007.
- [8] BARIĆ, T., BORAS, V., GALIĆ, R., Nadomjesni model tla zasnovan na umjetnim neuronskim mrežama, Energija, god. 56(2007), broj 1, Zagreb, 2007.
- [9] HARRIS, J. W., STOCKER, H., Handbook of Mathematics and Computational Science, 1998 Springer – Verlag, New York, Inc.

---

Uredništvo primilo rukopis:  
2007-10-09

Manuscript received on:  
2007-10-09

Prihvaćeno:  
2007-11-28

Accepted on:  
2007-11-28